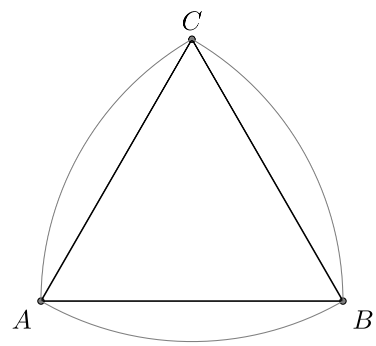
Solutions du Concours de l'AMQ (volet secondaire) — Édition 2021

Question 1 : Un triangle équilatéral arrondi. Soit un triangle équilatéral ΔABC dont les côtés sont de 3 cm. On trace trois arcs de cercle : l'arc BC d'un cercle de centre A, l'arc CA d'un cercle de centre B, et l'arc de cercle AB d'un cercle de centre C.
Quelle est l'aire totale de la figure obtenue?



Solution. Le triangle ΔABC étant équilatéral, ses angles mesurent tous 60 degrés. Chacun des secteurs de 60 degrés du cercle de rayon 3 cm a une aire qui correspond à 1/6 de celle du cercle de même rayon. Si on additionne l'aire de trois secteurs on obtient l'aire d'un demi-cercle. Il faut alors retrancher 2 fois l'aire du triangle équilatéral. Pour l'aire du demi-cercle, on a $\pi r^2/2 = \pi \cdot 3^2/2 = \frac{9\pi}{2}$. Pour obtenir l'aire du triangle équilatéral, on peut tout d'abord trouver la hauteur à l'aide du théorème de Pythagore. On a $h^2 + (3/2)^2 = 3^2$, d'où $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. L'aire du triangle est donc $\frac{bh}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$. Au final, on trouve une aire de $\frac{9}{2}(\pi - \sqrt{3})$ pour le triangle arrondi.

Question 2 : Une fonction très simple. Une fonction f est telle que $f(n) = f(2n+3)$ pour tout entier naturel n (i.e. $n = 0, 1, 2, \ldots$), et aussi telle que $f(n) = f((n+1)/2)$ pour tout entier naturel impair n. Montrer que cette fonction doit prendre la même valeur pour tous les nombres naturels. Vous devez bien justifier votre réponse.

Solution. Si on remplace n par 0 dans l'équation $f(n) = f(2n+3)$, on obtient que $f(0) = f(3)$. On observe ensuite que

$$f(n) = f(2n+3) = f((2n+3+1)/2) = f(n+2)$$

pour tout entier naturel. La fonction f prend donc la même valeur, disons a, en $0, 2, 4$, etc., et la même valeur, disons b, en $1, 3, 5$, etc. Comme $f(0) = f(3)$, il suit que $a = b$, d'où on conclut que f est constante sur l'ensemble des nombres naturels.

Question 3 : Une longue randonnée à vélo. Myriam fait une randonnée à vélo. Elle quitte le matin à 9 h 00. Elle est en forme et a un bon vent qui la pousse! Elle parcourt la distance de chez elle à chez ses grands-parents à une vitesse moyenne de 30 km/h. Au retour, après un bon dîner, la fatigue rend le tout vraiment plus difficile. Elle parcourt la même distance, mais cette fois à une vitesse moyenne de 20 km/h.Quelle est sa vitesse moyenne pour le trajet total, c'est-à-dire pour faire l'aller-retour?

Solution. Soit d la distance (en km) de chez Myriam à chez ses grands-parents. Par définition de la vitesse moyenne en physique, on sait que $30 = \frac{d}{t_1}$ et $20 = \frac{d}{t_2}$, où t_1 et t_2 sont respectivement le temps (en heures) pris par Mathilde pour aller chez ses grands-parents et celui pris pour le retour. La vitesse moyenne v (en km/h) pour faire l'aller-retour (d'une distance de $2d$) peut quant à elle être exprimée de la façon suivante:

$$v = \frac{2d}{t_1 + t_2}.$$

Comme $t_1 = \frac{d}{30}$ et $t_2 = \frac{d}{20}$, on a alors

$$v = \frac{2d}{\frac{d}{30} + \frac{d}{20}} = \frac{2d}{\frac{20d+30d}{600}} = \frac{1200d}{50d} = 24\,\text{km/h}.$$

Question 4 : Un jeu de rayage. Ahmed et Benoit font face au défi suivant. À tour de rôle, en débutant par Ahmed, chacun doit rayer un des nombres de la liste de sept nombres ci-dessous jusqu'à ce qu'il en reste exactement deux.

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3$$

Ahmed gagne si la somme des deux nombres restants est un multiple de 3, et Benoit gagne si la somme de ces deux nombres n'est pas un multiple de 3.
L'un des deux joueurs a une stratégie gagnante : il peut en effet s'assurer de gagner toutes les parties. Qui est ce joueur, et quelle est sa stratégie gagnante?

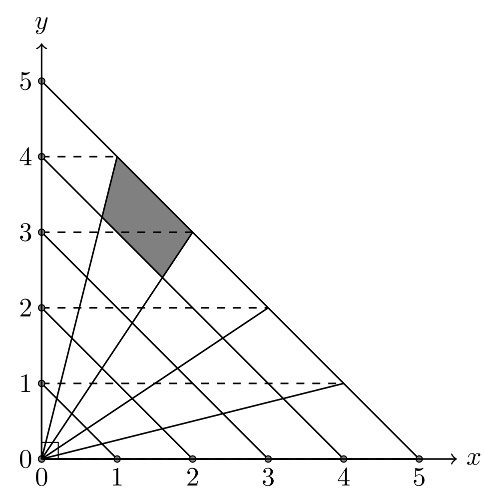
Solution. Ahmed a une stratégie gagnante. Il doit rayer le 3 à son premier coup. Par la suite, il lui suffit de rayer un 1 lorsque Benoit raye un 2, ou de rayer un 2 lorsque Benoit raye un 1. Les deux nombres qui resteront à la fin seront 1 et 2, dont la somme est 3. Il s'agit de la seule solution possible.

- Si Ahmed raye un 1, il suffit à Benoit de rayer un 1 lui aussi. Pour le coup suivant:
  - Benoit raye un 2 si Ahmed raye un 1 (il reste alors 2, 2 et 3);
  - Benoit raye un 1 si Ahmed raye un 2 (il reste alors 2, 2 et 3);
  - Benoit raye un 1 si Ahmed raye un 3 (il reste alors 2, 2 et 2).

  Dans ces trois scénarios, Ahmed ne peut rayer aucun des trois nombres pour que la somme des deux derniers nombres restants soit un multiple de 3.
- Si Ahmed raye un 2, il suffit à Benoit de rayer un 2 lui aussi. Pour le coup suivant
  - Benoit raye un 2 si Ahmed raye un 1 (il reste alors 1, 1 et 3);
  - Benoit raye un 1 si Ahmed raye un 2 (il reste alors 1, 1 et 3);
  - Benoit raye un 2 si Ahmed raye un 3 (il reste alors 1, 1 et 1).

  Dans ces trois scénarios, Ahmed ne peut rayer aucun des trois nombres pour que la somme des deux derniers nombres restants soit un multiple de 3.

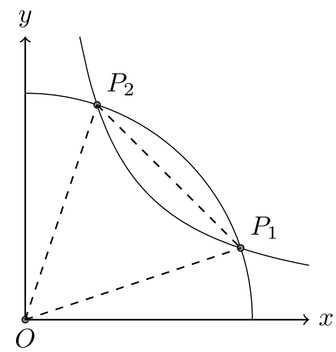
Question 5 : Une aire de quadrilatère. Sur la figure, les segments hachurés sont parallèles à l'axe des x. Quelle est l'aire du quadrilatère ombragé?



Solution. D'abord, observons que le quadrilatère hachuré est un trapèze. Il possède une grande base (B) mesurant $\sqrt{2}$ et une petite base (b) dont la longueur correspond au $4/5$ de B. Pour justifier ce dernier élément, on peut citer le fait que les côtés homologues dans des triangles semblables sont proportionnels. Finalement, pour déterminer la hauteur (h) dudit trapèze, il suffit d'observer qu'elle correspond à la moitié de la diagonale du carré unité. Ainsi, en utilisant la formule d'aire pour le trapèze, on obtient que

$$\text{Aire du quadrilatère} = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{5}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{10}.$$

Question 6 : Intersections équilibrées. La courbe $y = k/x$, où k est un nombre réel positif, coupe le cercle d'équation $x^2+y^2 = 4$ en deux points P_1 et P_2 du premier quadrant qui sont tels que le triangle OP_1P_2 soit équilatéral.
Quelle est la valeur de k?
Note : la figure n'est pas exacte.



Solution. Puisque ΔOP_1P_2 est équilatéral, et que les points P_1 et P_2 sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, on peut déduire que l'angle entre l'axe des y et le segment $\overline{OP_2}$ mesure 15°, tout comme l'angle entre l'axe des x et le segment $\overline{OP_1}$. Puisque le point P_1 est sur le cercle d'équation $x^2+y^2 = 4$, on en déduit que $d(O, P_1) = 2$. Ensuite, si (x, y) désigne les coordonnées de P_1, de simples rapports trigonométriques nous permettent de conclure que $(x, y) = (2\cos 15°, 2\sin 15°)$. Finalement, comme les coordonnées de P_1 satisfont $xy = k$, on en conclut que

$$k = 4\cos 15° \sin 15° = 2\sin 30° = 1.$$

Au passage, on a utilisé l'identité trigonométrique $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ et le fait que $\sin 30° = \frac{1}{2}$.