Solutions du Concours de l'AMQ (volet secondaire) — Édition 2023

Le nombre mystère. On a placé tous les nombres naturels entre 1 et 25 dans une grille 5×5 semblable à celle ci-contre. On a constaté que tous les nombres sur une des deux diagonales (appelons-la la diagonale A) ont un nombre impair de diviseurs. On a aussi remarqué que les nombres sur l'autre diagonale (appelons-la la diagonale B) avaient tous un même nombre premier p comme facteur. Finalement, on a constaté qu'aucun nombre à l'extérieur de la diagonale B n'avait p parmi ses facteurs premiers. Quel nombre est au centre de la grille ?

		?		

Solution.
Les nombres possédant un nombre impair de diviseurs correspondent aux carrés parfaits. Ainsi, les nombres sur la diagonale A sont $1, 4, 9, 16$ et 25. Parmi les nombres premiers qui apparaissent dans la factorisation première des nombres naturels inférieurs ou égaux à 25, le nombre premier 5 apparaît dans exactement 5 de ces nombres, à savoir $5, 10, 15, 20$ et 25. On vérifie facilement que 5 est le seul nombre premier à jouir de cette propriété. Ainsi, les nombres de la diagonale B sont $5, 10, 15, 20$ et 25. Comme 25 est le seul nombre commun aux diagonales A et B, c'est lui qui doit se trouver au centre de la grille.

Un système d'équations. Résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} y &= \quad x^2 - 1, \\ y^3 &= \quad 11 - x^2. \end{aligned}$$

Donner votre réponse sous forme de couples de nombres réels (x, y).

Solution.
On remplace y de la seconde équation par le terme de droite de la première.

$$\begin{array}{rrcl} & (x^2-1)^3 & = & 11 - x^2, \\ \Rightarrow & x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 & = & 11 - x^2, \\ \Rightarrow & x^6 - 3x^4 + 4x^2 - 12 & = & 0, \\ \Rightarrow & x^4(x^2-3) + 4(x^2-3) & = & 0, \\ \Rightarrow & (x^4+4)(x^2-3) & = & 0. \end{array}$$

Le terme $x^4 + 4$ ne peut jamais être nul. Le second terme donne, lorsqu'il est égal à 0,

$$x = \pm\sqrt{3}.$$

Si on remplace ces deux valeurs dans la première équation du système initial, on trouve que $y = 2$. Il y a donc deux couple (x, y), à savoir $\left(-\sqrt{3}, 2\right)$ et $\left(\sqrt{3}, 2\right)$.

Racine trigonométrique. Trouver toutes les racines (zéros) de la fonction

$$f(x) = \tan(x) + \sec(x) - \frac{2}{3}\cos(x)$$

situées dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Solution.
On simplifie la fonction $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan(x) + \sec(x) - \frac{2}{3}\cos(x), \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{\cos(x)} - \frac{2}{3}\cos(x), \\ &= \frac{1}{3\cos(x)}\left(3\sin(x) + 3 - 2\cos^2(x)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3\cos(x)}\left(3\sin(x) + 3 - 2(1-\sin^2(x))\right), \\ &= \frac{1}{3\cos(x)}\left(2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 1\right). \end{aligned}$$

Pour trouver les racines de la fonction, on peut remplacer $\sin(x)$ par y et trouver pour quelles valeurs de y l'équation de degré deux entre parenthèses est égale à 0. Cependant, il est important de noter que $f(x)$ n'est pas bien définie lorsque $\cos(x) = 0$. Il faut donc exclure les valeurs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ des solutions possibles.

L'équation de degré deux en y est

$$2y^2 + 3y + 1 = 0.$$

Cela nous donne deux valeurs possibles pour y, soit $-\frac{1}{2}$ et -1. Pour $\sin(x) = -\frac{1}{2}$, on a deux solutions dans l'intervalle précisé : $x = \frac{7\pi}{6}$ et $x = \frac{11\pi}{6}$. Pour $\sin(x) = -1$, on a une solution correspondant à $x = \frac{3\pi}{2}$. Cependant, nous savons que cette solution n'est pas valide. Il y a donc 2 solutions pour x, soit $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

Jeu de rayage. Ahmed et Benoit décident de passer le temps en jouant à un nouveau jeu. À tour de rôle, en débutant par Ahmed, chacun doit rayer un nombre de la liste des entiers 2, 3, 4, ..., 20, ainsi que tous les nombres qui ne sont pas relativement premiers avec ce nombre. Par exemple, si Ahmed rayait 7 à son premier coup, il devrait aussi rayer 14.

Ils jouent ainsi à tour de rôle, chacun devant rayer un nombre qui n'est pas encore rayé. Le gagnant est celui qui raye le dernier nombre.

L'un des deux joueurs a une stratégie gagnante : il peut en effet s'assurer de gagner toutes les parties. Qui est ce joueur, et quelle est sa stratégie gagnante ? Il faut non seulement bien expliquer la stratégie, mais aussi bien expliquer pourquoi cela fonctionne à coup sûr.

Solution.
L'objectif pour Ahmed est que la partie se termine après un nombre impair de coups, de sorte qu'il soit le dernier à jouer. On peut aussi remarquer que les facteurs premiers compris entre 2 et 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19. On peut voir que si ces huit nombres sont rayés, alors forcément tous les autres le sont aussi. On peut donc se concentrer sur cela.

Si Ahmed choisit un nombre ayant exactement deux de ces facteurs premiers à son premier coup, il restera exactement six nombres premiers qui n'ont pas été rayés. Si aucun nombre non-rayé ne possède deux de ses facteurs premiers, alors il gagne car il restera exactement 6 coups à jouer. Est-ce possible ? Oui !

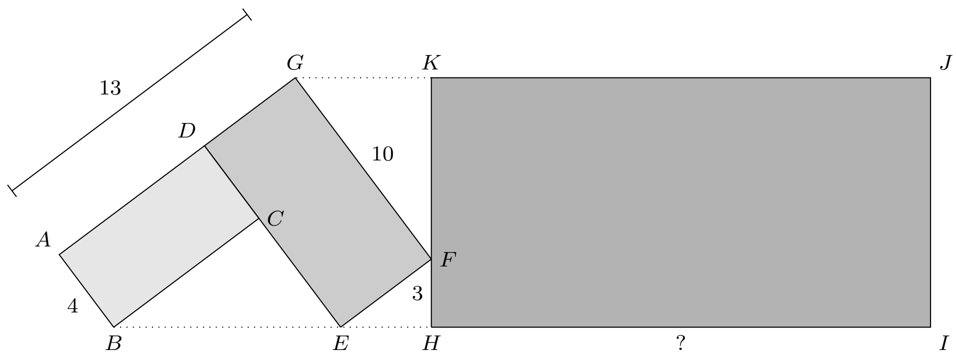
Si Ahmed choisit de rayer le 6 à son premier coup, alors il élimine tous les nombres ayant 2 ou 3 comme facteur premier : il reste uniquement 5, 7, 11, 13, 17 et 19, et chacun de ces nombres devra être rayé à un tour différent. Il reste six tours, et Ahmed gagne. Il gagne aussi de la même manière s'il raye 12 ou 18 (car il raye au total exactement les mêmes nombres).

Est-ce que ce sont les seules manières de gagner ? Si Ahmed choisit 10, il reste 3, 7, 9, 11, 13, 17 et 19. Comme 3 et 9 seront rayés en même temps, il ne reste en fait que 6 coups à jouer et Ahmed gagne encore. Il gagne aussi de la même manière s'il raye 20 à son premier coup.

Il faut cependant faire attention et ne pas conclure que cela fonctionne toujours. Si Ahmed raye 15, qui est un multiple de 3 et 5, alors il restera 2, 4, 8, 14, 16 ainsi que 7, 11, 13, 17 et 19. Si Benoit choisit alors de rayer 14, il ne restera plus que 11, 13, 17 et 19 et c'est Benoit qui gagne. On peut aussi voir que choisir 14 à son premier coup n'est pas une bonne stratégie.

En résumé, Ahmed possède au moins 5 premiers coups qui lui garantissent la victoire, soit rayer 6, 10, 12, 18 ou 20.

Casse-tête de rectangles. Dans l'illustration ci-dessous, les rectangles $ABCD$, $DEFG$ et $HIJK$ sont semblables. De plus, C est sur le segment $\overline{DE}$, F est sur $\overline{HK}$, E et H sont situés sur $\overline{BI}$ et ce dernier est parallèle à $\overline{GK}$. Sachant que $m\overline{AG} = 13$, $m\overline{AB} = 4$, $m\overline{FG} = 10$ et $m\overline{FH} = 3$, déterminer toutes les valeurs possibles pour la mesure de $\overline{HI}$.
(On suppose que $m\overline{HI} > m\overline{HK}$.)



Solution 1.
On peut démontrer que le triangle BCE est semblable à EFH : les angles BCE et EHF sont droits, et BEC est complémentaire à FEH, lui-même complémentaire à EFH, donc BEC et EFH sont congrus. De façon analogue, on peut démontrer que les triangles EFH et FGK sont semblables. La similitude étant une relation d'équivalence, on en déduit que BCE et FGK sont également semblables, et donc que $m\overline{BE} = 10$ puisque $m\overline{FG} = 10$. Aussi, comme $m\overline{CE} = m\overline{FG} - m\overline{AB} = 6$, on obtient $m\overline{BC} = 8$ par le théorème de Pythagore, puis $m\overline{FK} = 8$ par la similitude des triangles BCE et FGK. Ainsi, $m\overline{HK} = m\overline{FH} + m\overline{FK} = 11$. Par hypothèse, $ABCD$ est semblable à $HIJK$, et comme $m\overline{HI} > m\overline{HK}$, on obtient la proportion $\frac{m\overline{HI}}{m\overline{BC}} = \frac{m\overline{HK}}{m\overline{AB}}$, c'est-à-dire $\frac{m\overline{HI}}{8} = \frac{11}{4}$, et donc $m\overline{HI} = 22$.
Solution 2.
Posons $x = m\overline{EF}$. Comme $ABCD$ et $DEFG$ sont semblables, on en déduit l'une ou l'autre des proportions suivantes :

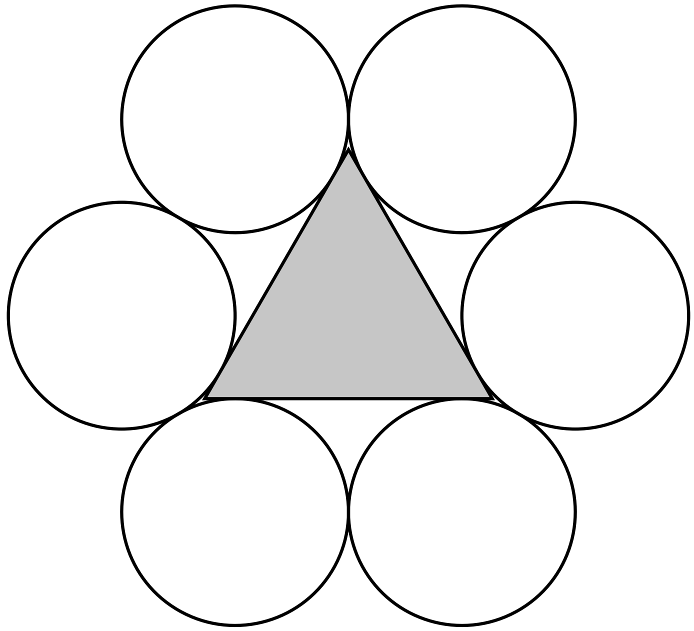
$$\frac{x}{4} = \frac{10}{13 - x} \tag{1}$$

$$\frac{x}{13 - x} = \frac{10}{4} \tag{2}$$

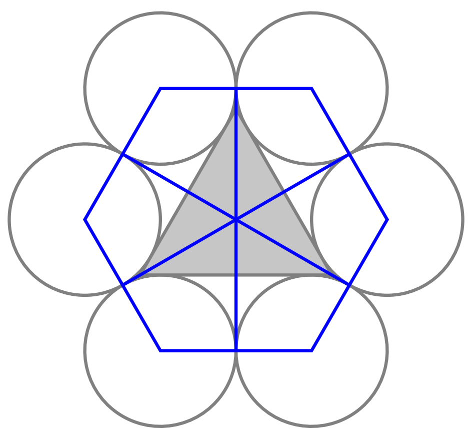
De (1) on obtient $x = 5$ ou $x = 8$, et de (2) on obtient $x = \frac{65}{7}$. Cependant, comme les triangles BCE et EFH sont semblables de telle sorte que $\frac{m\overline{CE}}{m\overline{FH}} = \frac{6}{3} = 2$, il s'ensuit que l'on doit rejeter $x = 8$ et $x = \frac{65}{7}$ puisque dans le premier cas $\frac{m\overline{BE}}{m\overline{EF}} = \frac{\sqrt{61}}{8} \neq 2$ et dans le second $\frac{m\overline{BE}}{m\overline{EF}} = \frac{\frac{2\sqrt{610}}{7}}{\frac{65}{7}} \neq 2$.

Bref, si $x = 5$, alors $m\overline{EH} = 4$, et par similitude des triangles EHF et FKG, on obtient $\frac{m\overline{FK}}{4} = \frac{10}{5}$ et donc $m\overline{FK} = 8$. Comme $DEFG$ et $HIJK$ sont semblables et que $m\overline{HI} > m\overline{HK}$ par hypothèse, on a $\frac{m\overline{HI}}{10} = \frac{11}{5}$. Donc, $m\overline{HI} = 22$.

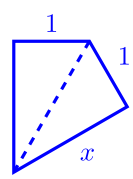
Le triangle encerclé. Sur la figure ci-dessous, le triangle ombragé est tangent à 6 cercles de rayon 1. De plus, les paires de cercles adjacents se touchent en un seul point. Les cercles et le triangle sont placés de sorte à former une figure ayant 3 axes de symétries. Quelle est l'aire du triangle ?



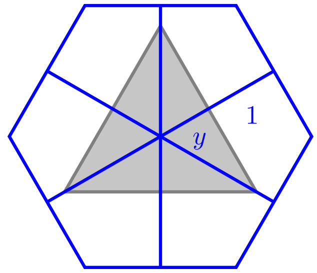
Solution. On trace d'abord certains segments sur l'image.



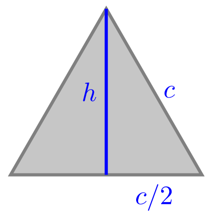
En ne regardant qu'une des six sections en bleu, on peut calculer la distance x entre le centre du triangle et le côté de l'hexagone.



On trouve $x = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$. En retirant 1 à x, on trouve le petit segment y entre le centre du triangle et son bord.



Par symétrie, ce triangle est équilatéral. De plus, les médianes s'intersectent au 1/3 de la hauteur du triangle. La hauteur de ce dernier est donc $h = 3y = 3(\sqrt{3} - 1)$.



On utilise le théorème de Pythagore pour trouver c et l'aire du triangle. En premier lieu, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Ainsi, l'aire est

$$A = \frac{ch}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}h^2 = 6(2\sqrt{3} - 3).$$