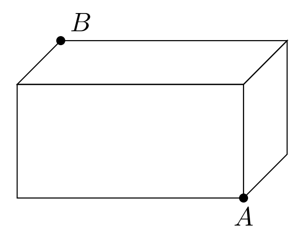
Solutions du Concours de l'AMQ (volet secondaire) — Édition 2022

1. Des multiples de 12. Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs de 6 chiffres, dont l'écriture comporte uniquement les chiffres 0 et 2, et qui sont divisibles par 12 ? *Note.* L'écriture d'un nombre à six chiffres ne peut pas débuter par un 0.

Solution 1.
Pour être divisible par 12, le nombre doit être divisible à la fois par 3 et par 4. La divisibilité par 3 est satisfaite lorsqu'il y a soit trois ou six positions occupées par le chiffre « 2 ». Pour les chiffres des unités et des dizaines, on ne peut avoir que « 00 » ou « 20 » afin de satisfaire la divisibilité par 4 ; dans le premier cas, il y a trois nombres possibles divisibles par 3 (202 200, 220 200 et 222 000) et dans le second aussi (200 220, 202 020 et 220 020). Il y a donc **six** entiers strictement positifs divisibles par 12.

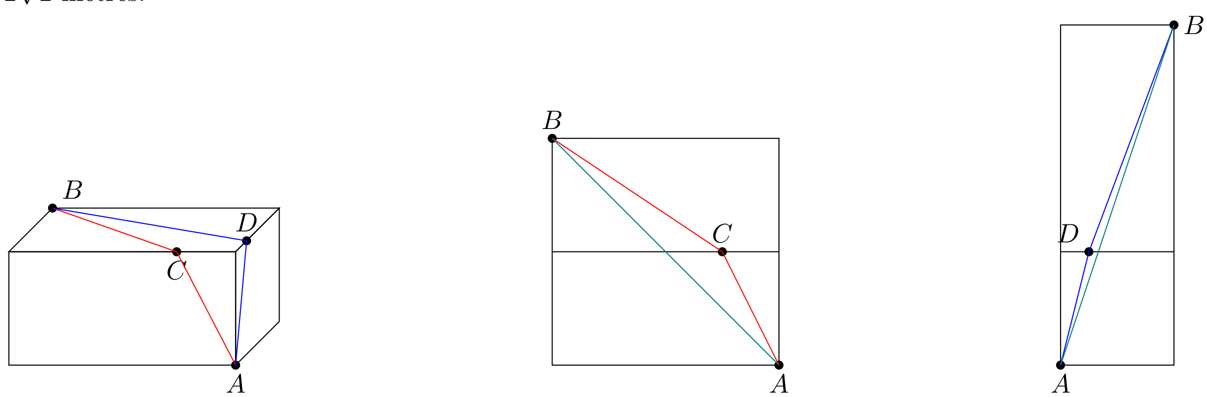
Solution 2.
Pour être divisible par 12, le nombre doit être divisible à la fois par 3 et par 4. Il suffit que le chiffre à la position des unités ne soit pas « 2 » pour que la divisibilité par 4 soit satisfaite ; parmi les cinq autres positions, exactement trois doivent être occupées par des « 2 » pour que le nombre soit divisible par 3. Comme l'écriture du nombre doit débuter (à partir de la gauche) par un « 2 », les autres « 2 » ne peuvent occuper que deux positions parmi les quatre restantes. On a donc $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \mathbf{6}$ combinaisons possibles, c'est-à-dire **six** entiers strictement positifs divisibles par 12.

2. Une araignée se déplace. Ci-contre est représenté un prisme droit rectangulaire avec deux faces carrées dont les côtés mesurent 1 mètre. Pour leur part, les faces rectangulaires ont une longueur de 2 mètres.

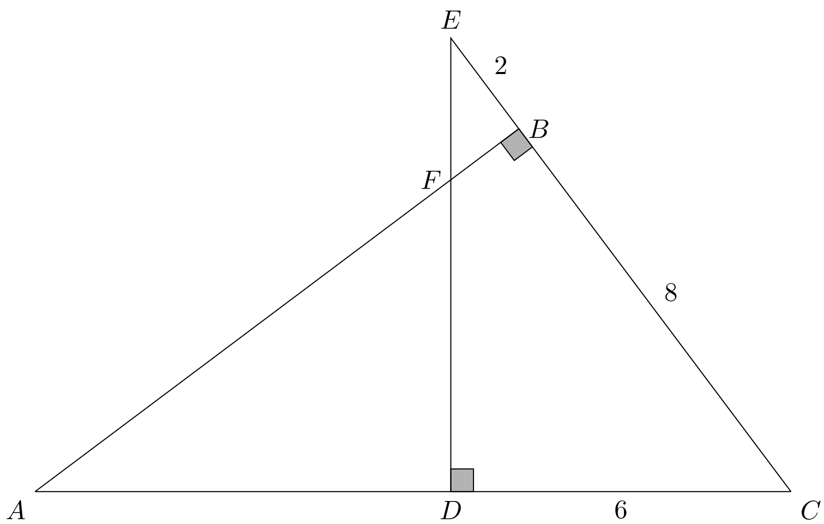


Une araignée se rend du point A au point B en se déplaçant à la surface du prisme. Quelle est la distance minimale qu'elle doit parcourir ?

Solution. Par symétrie, les chemins reliant A à B qui sont des candidats pour être les plus courts sont équivalents à un chemin de la forme $A \to C \to B$ ou $A \to D \to B$. Lorsqu'on déplie le prisme, on constate que pour minimiser la distance parcourue, les points C et D doivent être alignés avec A et B pour minimiser la distance. Il s'agit d'une application de l'inégalité triangulaire. Avec le théorème de Pythagore, on trouve que le chemin de la forme $A \to C \to B$ qui est le plus court mesure $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, alors que le chemin de la forme $A \to D \to B$ qui est le plus court mesure $\sqrt{10}$. La distance minimale parcourue par l'araignée est donc de $2\sqrt{2}$ mètres.



3. Problème de triangles. Dans les triangles rectangles ABC et CDE ci-dessous, $m\left(\overline{BE}\right) = 2$, $m\left(\overline{BC}\right) = 8$ et $m\left(\overline{CD}\right) = 6$.



Déterminez la mesure de $\overline{AF}$.

Solution. Par le théorème de Pythagore, on peut déduire du triangle rectangle CDE que $m\left(\overline{DE}\right) = 8$. Comme $\triangle CDE$ et $\triangle BEF$ sont semblables (ils ont tous deux un angle droit et les angles $\angle CED$ et $\angle BEF$ ont une même mesure), on en déduit par proportionnalité des côtés que $m\left(\overline{BF}\right) = \frac{3}{2}$. Aussi, comme $\triangle ABC$ et $\triangle CDE$ sont semblables (ils ont tous deux un angle droit et les angles $\angle ACB$ et $\angle DCE$ ont une même mesure), on en déduit que $m\left(\overline{AB}\right) = \frac{32}{3}$. Donc, $m\left(\overline{AF}\right) = m\left(\overline{AB}\right) - m\left(\overline{BF}\right) = \frac{32}{3} - \frac{3}{2} = \frac{55}{6}$.

Note. On peut remarquer que tous les triangles rectangles sont semblables au triangle rectangle le plus connu : celui dont les côtés sont de mesure 3, 4 et 5. On trouve alors rapidement toutes les mesures manquantes. En effet, l'hypoténuse $\overline{AC}$ du triangle ABC est alors de mesure $40/3$, donc $\overline{AD}$ est de mesure $22/3$. Puis l'hypoténuse $\overline{AF}$ du triangle ADF de mesure $55/6$.

4. Âge des enfants. Sylvie est la mère de deux enfants d'âge a et b (en années). Elle a remarqué que

$$a^2 + b^2 - 2ab - 10a + 10b + 25 = 0.$$

Quel âge avait l'aîné lorsque le cadet est né ?

Solution 1. Nous avons les équivalences ci-dessous :

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 - 2ab - 10a + 10b + 25 = 0 &\iff (a-b)^2 - 10(a-b) + 25 = 0 \ (\star) \\
&\iff (a-b)(a-b-10) + 25 = 0 \\
&\iff (b-a)(a-b-10) = 25. \\
&\iff -(b-a)((b-a)-10) = 25. \ (\star\star)
\end{aligned}$$

Ainsi, en supposant $b \geq a$, la différence d'âge $b - a$ doit être $1, 5$ ou 25, les seuls diviseurs entiers positifs de 25. De ces trois possibilités, seule celle où $b - a = 5$ ne contredit pas l'équation $(\star)$. L'ainé avait donc 5 ans lorsque le cadet est né.

Solution 2. En posant $u = a - b$ dans l'équation $(\star)$, nous sommes amenés à trouver les solutions de l'équation $u^2 - 10u + 25 = 0$. Les solutions de cette équation sont 5 et -5. On en déduit que la différence d'âge est de 5 ans.

Solution 3. On peut rééecrire l'équation de départ comme une équation polynomiale en a et chercher à exprimer a en fonction de b. Ainsi, ont doit avoir que

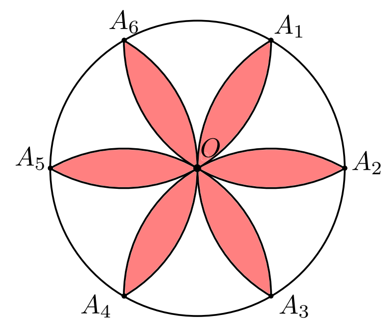
$$a^2 - (10+2b)a + b^2 + 10b + 25 = 0.$$

En appliquant la formule quadratique, on doit avoir que

$$a = \frac{10+2b \pm \sqrt{(10+2b)^2 - 4(b^2+10b+25)}}{2}.$$

On constate que le terme sous la racine est nul, de telle sorte que $a = 5 \pm b$. Si nous faisons l'hypothèse que $b \geq a$, on déduit que $b - a = 5$.

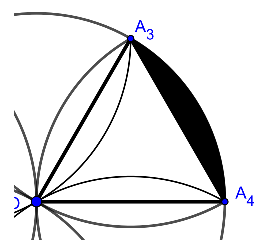
5. Fleurs en arcs de cercle. Sur la figure ci-contre, les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ sont également espacés. On a tracé six arcs de cercle, chacun passant par le centre O du cercle et par deux des six points, comme cela est illustré sur la figure.



Quelle est l'aire de la figure formée des six pétales, sachant que le rayon du cercle est de 10 centimètres ?

Note. La réponse peut contenir des racines carrées et la constante π.

Solution. Un demi-pétale est congruent à un sixième du disque auquel on enlève le triangle équilatéral dont la mesure des côtés est égale au rayon du cercle (voir figure).
L'aire d'un sixième du disque de rayon 10 est $\frac{100\pi}{6}$. Le Théorème de Pythagore nous permet de déterminer la hauteur du triangle équilatéral, qui est $5\sqrt{3}$: son aire est donc $\frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$. L'aire d'un demi-pétale est donc $\frac{100}{6}\pi - 25\sqrt{3}$.
En multipliant cette aire par 12, on obtient une aire de $200\pi - 300\sqrt{3}$.



6. Un point fixe. On dit qu'une fonction f (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) a un point fixe c lorsque $f(c) = c$.

Soient f et g deux fonctions distinctes (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ayant toutes deux un même point fixe c, et telles que $f(x) = ax + 4$ et $g(x) = 4x + b$ avec a et b des entiers strictement positifs. Déterminez tous les triplets (a, b, c) de valeurs possibles.

Solution. Comme $f(c) = g(c) = c$, on a les équations $c = ac + 4$ et $c = 4c + b$. On peut isoler c dans ces deux équations ce qui donne $c = \frac{-4}{a-1}$ et $c = \frac{-b}{3}$. On en déduit que l'on doit avoir $\frac{-4}{a-1} = \frac{-b}{3}$, donc que $(a-1)b = 12$.

Comme b est un entier strictement positif, il peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 ; cependant, si $b = 4$, alors f et g ne sont pas distinctes : $f(x) = g(x) = 4x + 4$. Il y a donc **cinq** triplets (a, b, c) : $\left(13, 1, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(7, 2, -\frac{2}{3}\right)$, $(5, 3, -1)$, $(3, 6, -2)$ et $(2, 12, -4)$.