Solutionnaire du concours annuel de l'AMQ, ordre secondaire, 15 février 2024.

Rappel des directives

1. Aucun document ne peut être consulté durant le concours et aucune aide extérieure ne peut être sollicitée.
2. Le concours doit être réalisé en une seule séance dont la durée maximale est de 2 heures.
3. L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.
4. Dans tous les cas où c'est possible, vous devez écrire la valeur exacte et non une valeur numérique approchée (par exemple, si $x^2 = 2$ et $x > 0$, vous devez écrire $x = \sqrt{2}$ plutôt que $x \approx 1,414$).

Questions

1. **Calcul astucieux.** Écrivez le plus simplement possible le nombre

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^{2023} \cdot \left(2-\sqrt{5}\right)^{2024}.$$

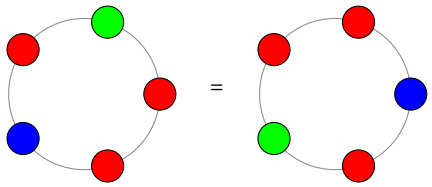
Solution. En utilisant l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, on obtient que

$$\left(2+\sqrt{5}\right) \cdot \left(2-\sqrt{5}\right) = 2^2 - \sqrt{5}^2 = 4 - 5 = -1.$$

L'expression est donc égale à $(-1)^{2023} \cdot \left(2-\sqrt{5}\right) = (-1) \cdot \left(2-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5} - 2$.

2. **Les bracelets.** Jade fabrique des bracelets en utilisant cinq perles, qui peuvent être de trois couleurs différentes : rouges, vertes et bleues. Elle peut utiliser la même couleur plusieurs fois et ne pas utiliser certaines couleurs si elle le souhaite.

Combien de bracelets **différents** Jade peut-elle fabriquer, si on considère que deux bracelets identiques à une rotation près comptent comme le même bracelet ?



Solution. Une solution particulièrement brève peut être donnée comme suit. On forme un bracelet en alignant les cinq perles le long d'une corde, de gauche à droite, puis en attachant les deux extrémités ensemble. Le nombre de façons d'agencer ainsi cinq perles sur une corde est 3^5, toutefois, certains de ces agencements mènent au même bracelet (à rotation près). Précisément, chaque bracelet est représenté par exactement cinq agencements (qui dépendent de l'endroit où se trouve le noeud) à trois exceptions près : le bracelet entièrement rouge, le bracelet entièrement bleu et le bracelet entièrement vert (qui ne proviennent que d'un seul agencement). Si X est le nombre de bracelets recherché, on a donc :

$$5(X-3) + 3 = 3^5.$$

En résolvant cette équation, on trouve $X = 51$. Jade peut donc former 51 bracelets différents, à rotation près.

Autre solution. On peut dénombrer les bracelets en traitant les cas selon le nombre de couleurs de perles. Il y a 3 bracelets formés de perles d'une seule couleur. Pour deux couleurs A et B (choisies de 6 façons) , il y un arrangement possible avec le choix de 4 perles de couleur A et 1 perle de couleur B, et deux arrangements possibles avec 3 perles de couleur A et deux perles de couleurs B, pour un total de 18 bracelets.

Finalement, pour trois couleurs A, B et C, il y a 4 arrangements possible avec 3 perles de couleur A, une perle de couleur B et une perle de couleur C : il y a trois choix pour la couleur A, donc au total $4 \times 3 = 12$ bracelets.

Il reste le choix de 2 perles de couleur A, 2 perles de couleur B et une perle de couleur C : il y a alors 6 configurations possibles, et comme on a trois choix pour la couleur C, cela donne $6 \times 3 = 18$ bracelets.

On obtient un total de $3 + 18 + 12 + 18 = 51$.

3. **L'escalier**. Jules et Julie vont s'entraîner : ils montent et descendent un escalier. Ils sont tous les deux très réguliers : chacun monte les marches à la même vitesse qu'il les descend, bien que Julie soit plus rapide que Jules. Les deux débutent leur entraînement à 17h00. Julie est en haut de l'escalier et le descend, alors que Jules est en bas et le monte. Ils se croisent une première fois alors que Jules a monté 60 marches, et une deuxième fois alors que Jules a commencé à redescendre : il a alors descendu exactement 20 marches.

   Combien de marches y a-t-il dans l'escalier ?

   Solution. Lors de la première rencontre, les deux ont parcouru ensemble exactement toutes les marches de l'escalier, et Jules a fait 60 marches. Lors de la deuxième rencontre, les deux ont parcouru ensemble exactement trois fois toutes les marches de l'escalier, et Jules a donc fait exactement 180 marches. S'il vient d'en descendre 20, c'est que l'escalier en compte 160.

   Autre solution. Il y a aussi plusieurs approches algébriques qui fonctionnent. En voici une.

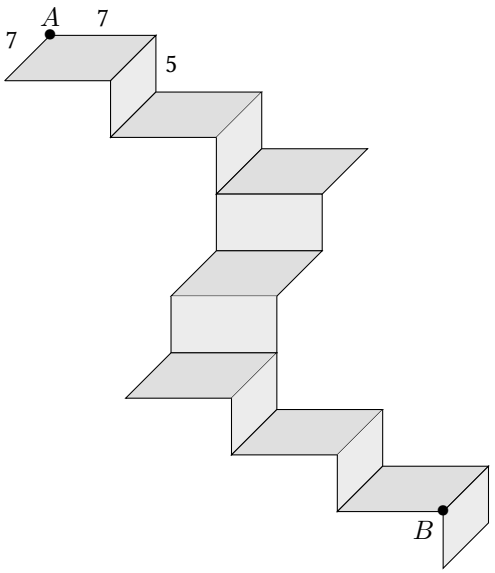
   Soit N le nombre de marches que compte l'escalier, t_1 le temps écoulé lors de la première rencontre, et t_2 le temps écoulé depuis le début lors de la deuxième rencontre. Finalement, soit v_1 et v_2 les vitesses (en marches par secondes) de Julie et Jules.

   Au temps t_1, on a $v_1 \cdot t_1 = N - 60$ et $v_2 \cdot t_1 = 60$. Au temps t_2, on a $v_1 \cdot t_2 = 2N - 20$ de même que $v_2 \cdot t_2 = N + 20$. En écrivant la valeur de v_1/v_2 aux temps t_1 et t_2, on obtient

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N - 60}{60} = \frac{2N - 20}{N + 20}.$$

   Cela donne que $(N + 20)(N - 60) = 60(2N - 20)$. En multipliant et en simplifiant, on obtient $N^2 = 160N$. Comme $N \neq 0$, on a finalement $N = 160$.

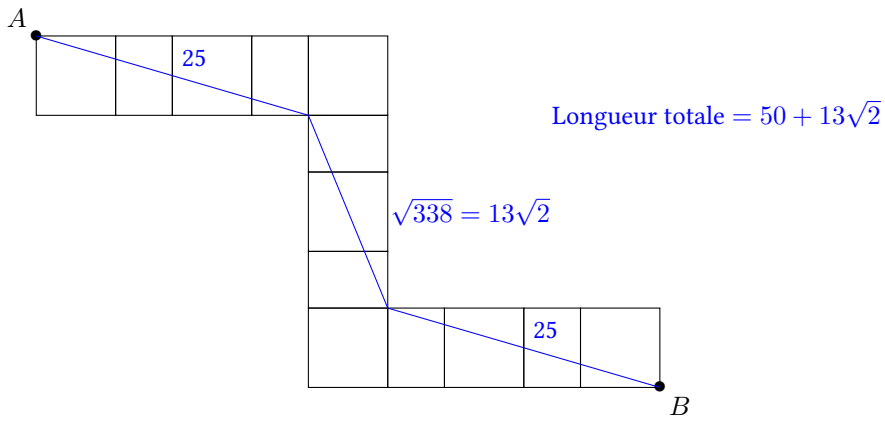
4. **L'escargot**. Les marches de l'escalier ci-dessous sont toutes de mêmes dimensions (7×7) et la hauteur de chaque contremarche est de 5.



Quelle est la plus courte distance pouvant être parcourue par un escargot qui part du point A pour se rendre au point B en glissant sur les marches et les contremarches (colorées en gris)?

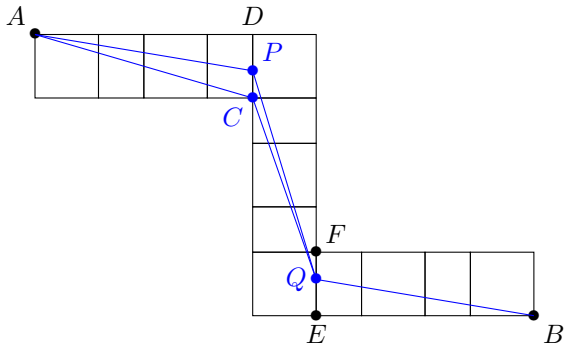
Solution. Il suffit de déterminer le parcours de l'escargot qui se rapproche le plus du segment $\overline{AB}$ tout en demeurant dans la région qui correspond à une marche ou à une contremarche.

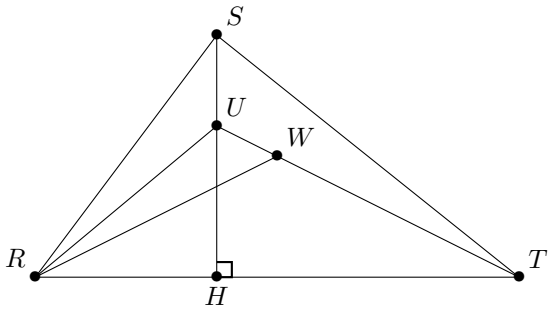
Trois applications du théorème de Pythagore permettent de calculer la longueur totale du trajet.



Pour le concours, on ne demandait pas de prouver que ce trajet est le plus court possible : nous allons maintenant le faire. Pour cela, nous allons montrer que le trajet le plus court fait nécessairement passer l'escargot par les points C et F (voir figure ci-dessous).

Dans un premier temps, remarquons que l'escargot doit absolument passer par un point P appartenant au segment $\overline{CD}$, de même que par un point Q appartenant au segment $\overline{EF}$. Pour montrer que l'escargot doit passer en C, il nous faut prouver que $AC + CQ < AP + PQ$ $(\star)$. Posons notre regard sur la figure de droite, où nous considérons un triangle ΔRST quelconque avec W un point arbitraire à l'intérieur de ΔRST. Nous allons montrer que $RW + WT < RS + ST$. L'inégalité $(\star)$ sera alors établie en choisissant le point C pour W et le triangle ΔAPQ pour ΔRST.



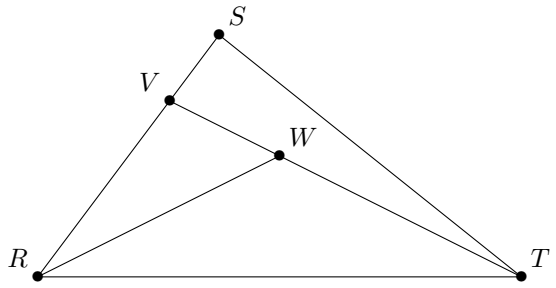


Soit $\overline{SH}$ la hauteur issue de S et notons U l'intersection du prolongement de $\overline{WT}$ avec $\overline{SH}$. Notons que si W avait été choisi à gauche de la hauteur, le point U aurait été choisi comme le prolongement de $\overline{RU}$ avec $\overline{SH}$. Enfin, si W avait été choisi sur $\overline{SH}$, l'inégalité aurait été directe par les arguments qui seront donnés aux équations (3) et (4). Nous avons que

$$\begin{aligned} RW + WT &< RU + UW + WT && \text{(inégalité triangulaire dans } \Delta RUW)) && (1)\\ &< RU + UT && (U, W \text{ et } T \text{sont alignés}) && (2)\\ &< RS + UT && \text{(Pythagore)} && (3)\\ &< RS + ST. && \text{(Pythagore)} && (4) \end{aligned}$$

Pour la justification de l'inégalité (3), nous constatons que le triangle rectangle ΔRSH a même base que le triangle rectangle ΔRUH, mais une hauteur supérieure. Le théorème de Pythagore permet de conclure que son hypoténuse sera forcément plus longue. Le même raisonnement permet de justifier l'inégalité (4).

Un autre raisonnement pour justifier l'inégalité $RW + WT < RS + ST$ va comme suit : puisque W est à l'intérieur de $\triangle RST$, il existe un point V sur le segment $\overline{RS}$ tel que $VT = VW + WT$.



On en déduit :

$$\begin{aligned} RS + ST &= (RV + VS) + ST && \text{(car } V \text{ est sur } \overline{RS}\text{)} \\ &= RV + (VS + ST) && \text{(par associativité de l'addition)} \\ &> RV + VT && \text{(par l'inégalité triangulaire dans } \triangle STV\text{)} \\ &= RV + (VW + WT) && \text{(car } W \text{ est sur } \overline{VT}\text{)} \\ &= (RV + VW) + WT && \text{(par associativité de l'addition)} \\ &> RW + WT && \text{(par l'inégalité triangulaire dans } \triangle RVW\text{)} \end{aligned}$$

Ainsi, l'escargot doit passer par C pour minimiser la longueur du trajet correspondant aux deux premiers segments. Par un raisonnement similaire, on déduit que celui-ci devra passer passer par F pour minimiser la longueur du trajet correspondant aux deux derniers segments. Ces deux contraintes forcent le trajet de l'escargot à être celui présenté initialement.

5. **Système d'équations**. Soit
$$f(x, y) = x^2(x^2 + 1) + (x + y)\left((x + y)^2 + 1\right).$$
Trouvez les solutions (x, y) (où x et y sont des nombres réels) pour lesquelles on a
$$f(x, y) = f(-x, -y) = 1.$$

Solution.

On commence d'abord par remarquer que si (x, y) est une solution de $f(x, y) = f(-x, -y) = 1$, alors
$$0 = \frac{f(x, y) - f(-x, -y)}{2} = (x + y)((x + y)^2 + 1).$$
Puisque $((x + y)^2 + 1) > 0$, alors on doit avoir que $x + y = 0$, donc que $y = -x$. Les solutions doivent donc être de la forme $(x, -x)$, mais ce ne sont pas toutes les valeurs de x qui sont possibles.

En effet, on doit avoir que
$$1 = f(x, -x) = x^2(x^2 + 1).$$
En posant $w = x^2$, on trouve une équation de degré 2 à résoudre, donnée par
$$w^2 + w - 1 = 0.$$

Les solutions sont

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Or, puisque $w = x^2 \geq 0$, on n'a qu'une valeur valide pour w. Ainsi,

$$x^2 = w = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

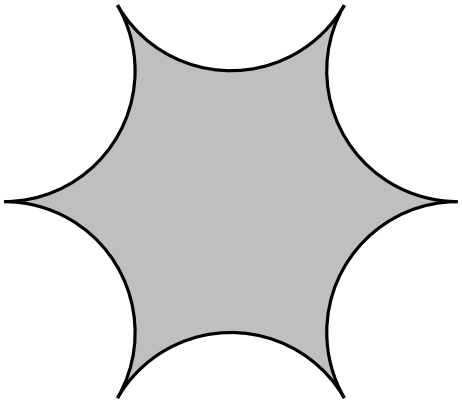
Cela nous donne 2 solutions pour x,

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Finalement, puisque $x + y = 0$, alors $y = -x$ et on a deux solutions finales

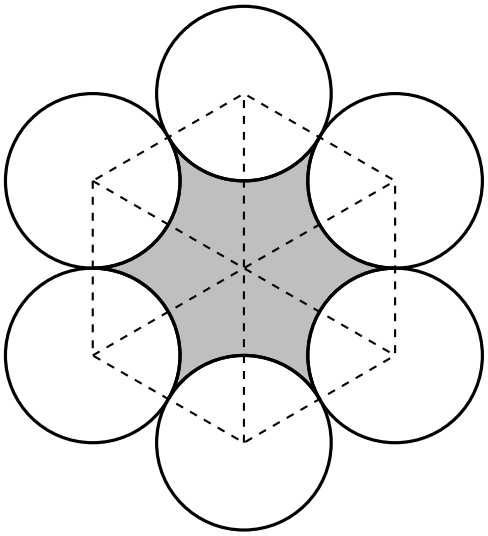
$$\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \mp\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right).$$

6. **Le shuriken**. On construit un shuriken à l'aide d'arcs de cercle. Il possède six axes de symétrie. Les arcs de cercle qui se touchent sont tangents. Si la largeur (la distance d'une pointe à sa pointe opposée) est de 10, quelle est l'aire du shuriken ?



Solution.

On peut dessiner les cercles complets provenant des arcs.



On peut voir que l'aire en gris est l'aire de l'hexagone moins l'aire de deux cercles. On a rajouté des triangles en pointillé. Ces triangles sont équilatéraux par symétrie de la figure. L'hexagone est de hauteur 10 et donc la hauteur d'un triangle équilatéral est de 5. On peut calculer le côté c du triangle

$$c^2 = 5^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \to c = 10\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

L'aire de l'hexagone est

$$A_h = 6\frac{5c}{2} = 50\sqrt{3}.$$

Le rayon d'un cercle est de $c/2$ et donc l'aire d'un cercle est de

$$A_c = \frac{c^2}{4}\pi = \frac{25}{3}\pi.$$

Finallement, l'aire de la zone grise est

$$A = A_h - 2A_c = 50\sqrt{3} - \frac{50}{3}\pi = 50\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$