Concours annuel de l'AMQ, ordre secondaire, 15 février 2024.

Directives

1. Aucun document ne peut être consulté durant le concours et aucune aide extérieure ne peut être sollicitée.
2. Le concours doit être réalisé en une seule séance dont la durée maximale est de 2 heures.
3. L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.
4. Dans tous les cas où c'est possible, vous devez écrire la valeur exacte et non une valeur numérique approchée (par exemple, si $x^2 = 2$ et $x > 0$, vous devez écrire $x = \sqrt{2}$ plutôt que $x \approx 1,414$).

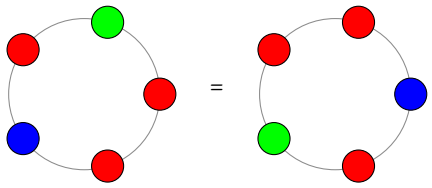
Questions

1. **Calcul astucieux.** Écrivez le plus simplement possible le nombre

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^{2023} \cdot \left(2-\sqrt{5}\right)^{2024}.$$

2. **Les bracelets.** Jade fabrique des bracelets en utilisant cinq perles, qui peuvent être de trois couleurs différentes : rouges, vertes et bleues. Elle peut utiliser la même couleur plusieurs fois et ne pas utiliser certaines couleurs si elle le souhaite.

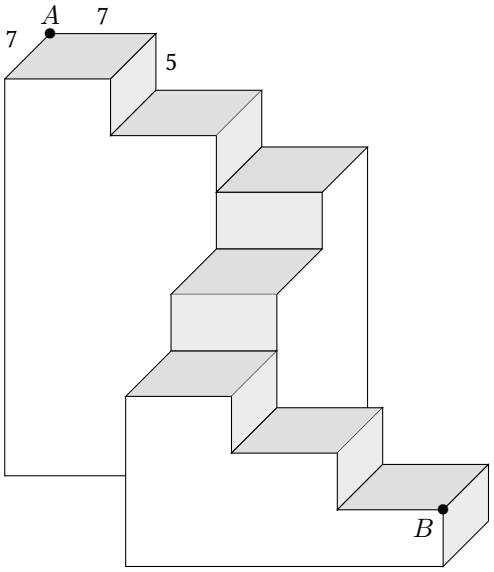
   Combien de bracelets **différents** Jade peut-elle fabriquer, si on considère que deux bracelets identiques à une rotation près comptent comme le même bracelet ? **Inscrivez votre réponse finale dans l'encadré au bas de cette page.**



3. **L'escalier.** Jules et Julie vont s'entraîner : ils montent et descendent un escalier. Ils sont tous les deux très réguliers : chacun monte les marches à la même vitesse qu'il les descend, bien que Julie soit plus rapide que Jules. Les deux débutent leur entraînement à 17h00. Julie est en haut de l'escalier et le descend, alors que Jules est en bas et le monte. Ils se croisent une première fois alors que Jules a monté 60 marches, et une deuxième fois alors que Jules a commencé à redescendre : il a alors descendu exactement 20 marches.

   Combien de marches y a-t-il dans l'escalier ?

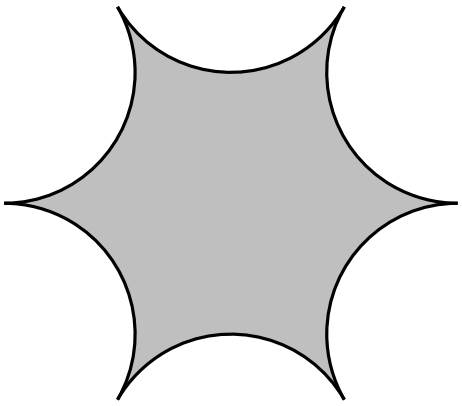
4. **L'escargot**. Les marches de l'escalier ci-dessous sont toutes de mêmes dimensions (7×7) et la hauteur de chaque contremarche est de 5.



5. **Système d'équations**. Soit

$$f(x, y) = x^2(x^2 + 1) + (x + y)\left((x + y)^2 + 1\right).$$

Trouvez les solutions (x, y) (où x et y sont des nombres réels) pour lesquelles on a

$$f(x, y) = f(-x, -y) = 1.$$

6. **Le shuriken**. On construit un shuriken à l'aide d'arcs de cercle. Il possède six axes de symétrie. Les arcs de cercle qui se touchent sont tangents. Si la largeur (la distance d'une pointe à sa pointe opposée) est de 10, quelle est l'aire du shuriken ?