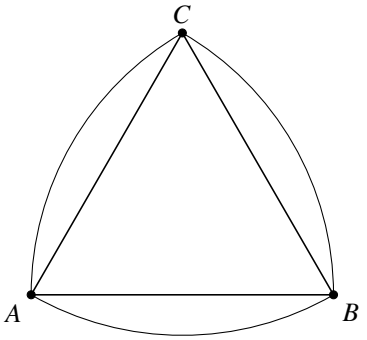
Concours annuel de l'AMQ — Volet secondaire — 2021

1. (10 points) **Un triangle équilatéral arrondi.** Soit un triangle équilatéral *ABC* dont les côtés sont de 3 cm. On trace trois arcs de cercle : l'arc *BC* d'un cercle de centre *A*, l'arc *CA* d'un cercle de centre *B*, et l'arc de cercle *AB* d'un cercle de centre *C*.
   Quelle est l'aire totale de la figure obtenue ?



2. (10 points) **Une fonction très simple.** Une fonction f est telle que $f(n) = f(2n+3)$ pour tout entier naturel n (i.e. $n = 0, 1, 2, \ldots$), et aussi telle que $f(n) = f((n+1)/2)$ pour tout entier naturel impair n. Montrer que cette fonction doit prendre la même valeur pour tous les nombres naturels. Vous devez bien justifier votre réponse.

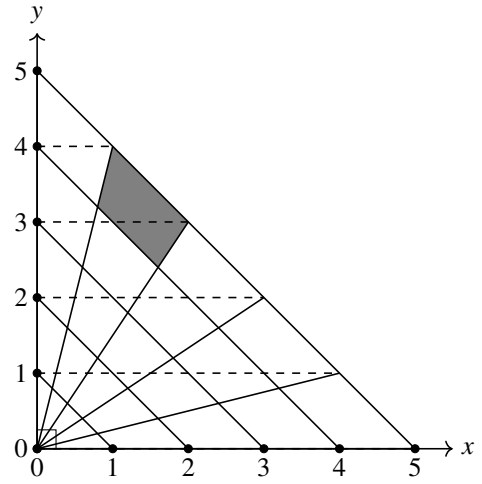
3. (10 points) **Une longue randonnée à vélo.** Myriam fait une randonnée à vélo. Elle quitte le matin à 9 h 00. Elle est en forme et a un bon vent qui la pousse ! Elle parcourt la distance de chez elle à chez ses grands-parents à une vitesse moyenne de 30 km/h. Au retour, après un bon dîner, la fatigue rend le tout vraiment plus difficile. Elle parcourt la même distance, mais cette fois à une vitesse moyenne de 20 km/h.
   Quelle est sa vitesse moyenne pour le trajet total, c'est-à-dire pour faire l'aller-retour ?

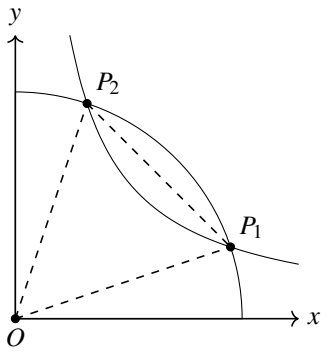
4. (10 points) **Un jeu de rayage.** Ahmed et Benoit font face au défi suivant. À tour de rôle, en débutant par Ahmed, chacun doit rayer un des nombres de la liste de sept nombres ci-dessous jusqu'à ce qu'il en reste exactement deux.

   1 1 1 2 2 2 3

   Ahmed gagne si la somme des deux nombres restants est un multiple de 3, et Benoit gagne si la somme de ces deux nombres n'est pas un multiple de 3.
   L'un des deux joueurs a une stratégie gagnante : il peut en effet s'assurer de gagner toutes les parties. Qui est ce joueur, et quelle est sa stratégie gagnante ?

5. (10 points) **Une aire de quadrilatère.** Sur la figure, les segments hachurés sont parallèles à l'axe des x. Quelle est l'aire du quadrilatère ombragé ?



Initiales:

6. (10 points) **Intersections équilibrées.** La courbe $y = k/x$, où k est un nombre réel positif, coupe le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$ en deux points P_1 et P_2 du premier quadrant qui sont tels que le triangle OP_1P_2 soit équilatéral. Quelle est la valeur de k ?
Note : la figure n'est pas exacte.