Solutions du concours AMQ 2026, ordre secondaire.

1. **Fonction affine.**

   Soit a et b deux nombres réels non nuls et soit f une fonction telle que $f(x) = ax+b$ pour tout x réel. **Déterminer les valeurs de a et b** sachant que

   $$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{et} \qquad f(a) = f\left(\frac{1-b}{a}\right) + f\left(\frac{-b^2}{a}\right).$$

   Solution.

   Avec la première équation, on trouve

   $$a^2 = b^2.$$

   Avec la seconde, on a

   $$1 = a^2 + b^2.$$

   Avec ces deux équations, on trouve que

   $$a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   On a donc 4 solutions

   $$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2. **Casse-tête.**

   Un casse-tête standard rectangulaire a le même nombre de pièces qui se retrouvent sur les côtés que de pièces qui ne le sont pas. **Combien ce casse-tête a-t-il de morceaux ?** Justifier clairement et donner toutes les solutions.

   Note. Un casse-tête standard a le même nombre de pièces sur chaque ligne, et le même nombre sur chaque colonne.

   Solution.

   Soient n et m le nombre de lignes et de colonnes du casse-tête. Sans perte de généralité, on peut poser que $n \leq m$. Le nombre de pièces sur les côtés est $2n + 2m - 4$ alors que le nombre de pièces à l'intérieur est $(n-2)(m-2)$. On doit donc avoir

   $$2(n + m - 2) = (n - 2)(m - 2).$$

   En développant l'équation et en simplifiant, on trouve

   $$nm - 4n - 4m + 8 = 0.$$

   Une façon de transformer cette équation pour trouver ses solutions est de factoriser les termes en

   $$(n - 4)(m - 4) = 8.$$

   En posant $a = n - 4$ et $b = m - 4$, on peut trouver les solutions entières qui vérifient $ab = 8$.

a	b	n	m	nm
1	8	5	12	60
2	4	6	8	48

   Il n'y a pas de solution négative, car autrement on trouverait un nombre négatif de pièces de casse-tête.

   On trouve donc deux solutions : 60 et 48.

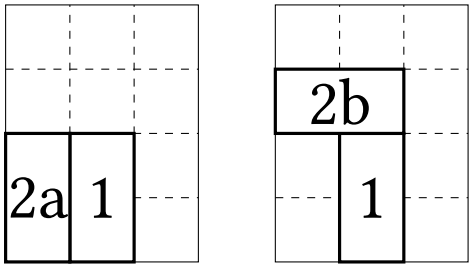
3. **Angie et Bastien.**

   Angie et Bastien jouent au jeu suivant, inspiré du jeu de Tétris. À tour de rôle, en débutant par Angie, chacun place un domino 2 par 1 dans une grille rectangulaire de largeur 3 et de hauteur 4 en respectant le mouvement suivant.

   Le domino est placé par le joueur en haut de la grille : horizontalement vis-à vis deux des trois colonnes, ou verticalement vis-à-vis une colonne. Puis, il est descendu vers le bas jusqu'à ce qu'il ne puisse plus descendre. Aucun autre mouvement n'est permis.

   L'un des deux joueurs peut s'assurer de gagner toutes les parties en jouant bien. **Qui est ce joueur, et quelle est sa stratégie gagnante ? On doit bien expliquer la stratégie, et ce pourquoi elle mène toujours à la victoire.**

   Exemples de coups possibles. Sur la figure, si Angie a inséré le domino 1 verticalement dans la deuxième colonne, alors Bastien pourrait par exemple placer le deuxième domino de sorte qu'il soit en position 2a ou 2b. (Ce ne sont pas les seuls coups possibles pour Bastien.) Le joueur qui est le dernier à pouvoir placer un domino a gagné la partie.



   Solution.

   Bastien a plus d'une stratégie gagnante. Nous en décrivons une.

   Peu importe le premier coup joué par Angie, Bastien peut jouer pour compléter un carré 2 par 2. Puis, selon les coups de Angie, voici les réponses de Bastien.

   Cas 1. Angie joue horizontalement directement au-dessus du carré 2 par 2, pour compléter un rectangle 2 par 3. Alors Bastien joue pour compléter un rectangle 2 par 4.

   Il reste alors un seul coup possible pour Angie : verticalement dans la colonne libre. Bastien gagne en jouant le même coup pour compléter la colonne.

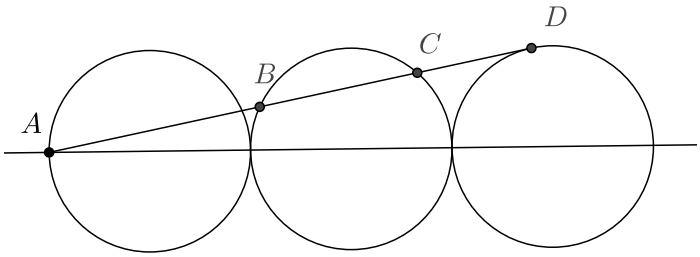
   Cas 2. Angie joue horizontalement au-dessus d'une case du carré 2 par 2 et pour bloquer la colonne vide. Alors Bastien joue horizontalement au-dessus d'une case du domino de Angie et au-dessus d'une case vide (donc pas vis-à-vis le coup de Angie). Il ne reste plus de coup possible pour Angie.

   Cas 3. Angie joue verticalement à côté du carré 2 par 2, donc pour compléter un rectangle 3 par 2. Bastien joue le même coup que Angie, et il reste un carré 2 par 2 de libre. Si Angie joue verticalement, Bastien pourra aussi le faire. De même si Angie joue horizontalement.

   Cas 4. Angie joue verticalement au dessus du carré. Bastien joue verticalement dans la colonne libre au-dessus du carré, pour compléter un rectangle 2 par 4, comme dans le cas 1.

4. **Tangente et trois cercles.**

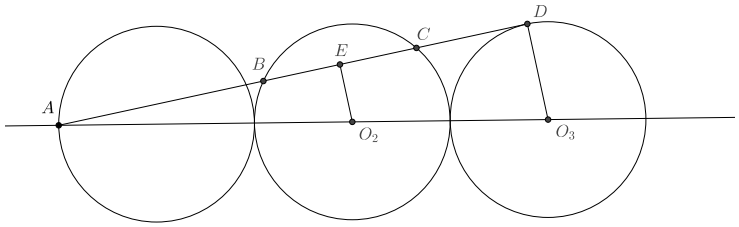
   Sur la figure, les trois cercles de rayon 12 cm sont tangents entre eux. La droite AD est tangente au troisième cercle en D et coupe le deuxième cercle en B et C. **Déterminer la mesure de** BC.



Solution.

Soit O_2 et O_3 les centres des deuxième et troisième cercles.

On considère la perpendiculaire à $\overline{BC}$ issue de O_2, et on dénote par E son point d'intersection avec $\overline{BC}$. Le triangle $\triangle AEO_2$ est un triangle rectangle.



Le triangle $\triangle ADO_3$ est aussi un triangle rectangle par construction du point D. Les triangles $\triangle AEO_2$ et $\triangle ADO_3$ sont semblables, car ils ont les mêmes valeurs d'angles :

- $m\angle EAO_2 = m\angle DAO_3$,
- $m\angle AEO_2 = m\angle ADO_3 = 90°$.

On a donc

$$\frac{m\overline{AO_3}}{m\overline{AO_2}} = \frac{m\overline{DO_3}}{m\overline{EO_2}}.$$

On sait que $m\overline{AO_3} = 60$ cm, $m\overline{AO_2} = 36$ cm et $m\overline{DO_3} = 12$ cm. Après quelques calculs, on peut montrer que $m\overline{EO_2} = \frac{36}{5}$ cm. On utilise ensuite le Théorème de Pythagore sur le triangle rectangle $\triangle BEO_2$ pour déterminer $m\overline{BE}$. On a

$$m\overline{BE} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{36}{5}\right)^2}\ \text{cm} = \frac{48}{5}\ \text{cm}.$$

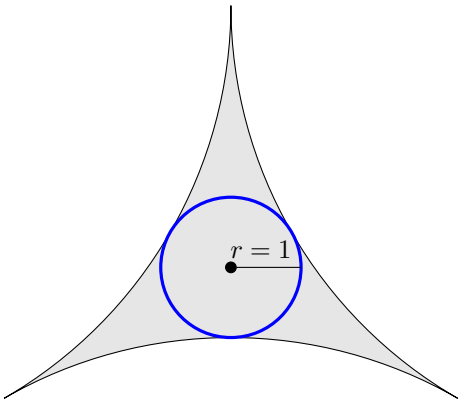
Finalement, puisque $\overline{EO_2}$ coupe perpendiculairement $\overline{BC}$ et qu'il passe sur le centre du cercle, alors il coupe la corde $\overline{BC}$ en son centre. Ainsi,

$$m\overline{BC} = 2m\overline{BE} = \frac{96}{5}\ \text{cm} = 19{,}2\ \text{cm}.$$

5. **Triarc**.

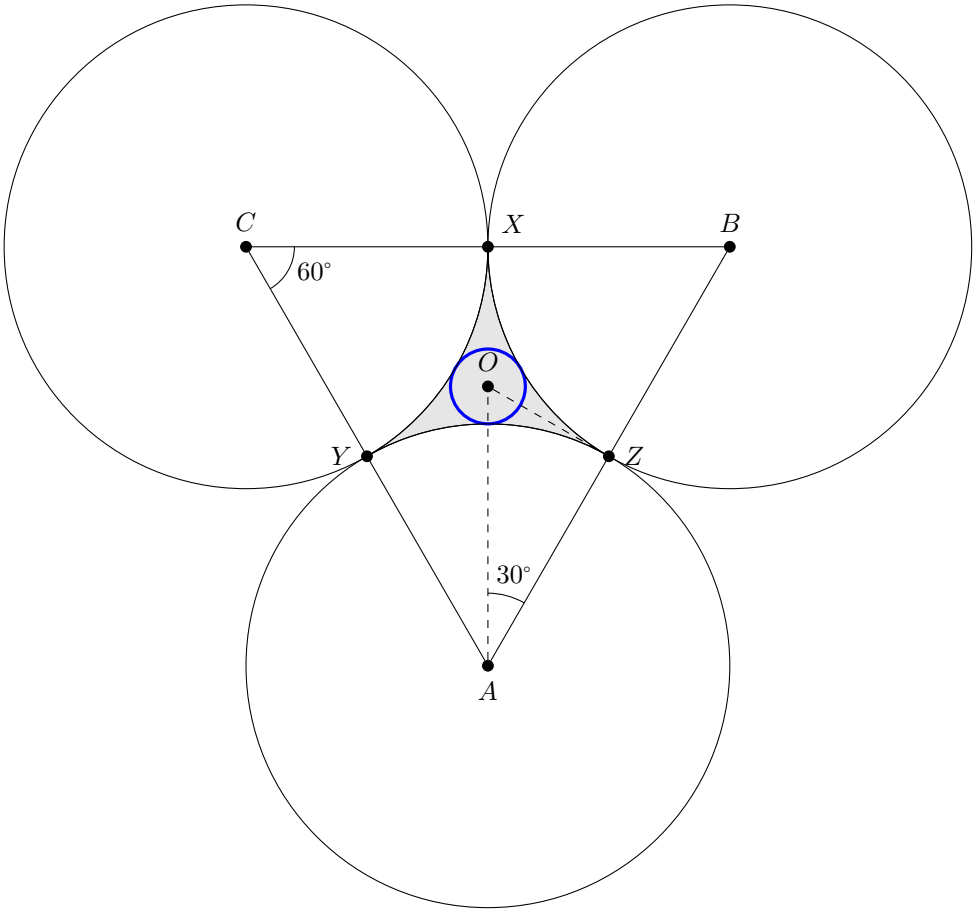
Sur la figure, un cercle de rayon 1 est tangent à trois grands arcs de cercles, tous les trois égaux et tangents entre eux. **Quel est le *périmètre* de la figure délimitée par ces trois arcs ?**

Note. Des arcs sont tangents entre eux si les cercles qui les contiennent sont tangents.



Solution.

Soit O le centre du petit cercle. On commence par dessiner les trois cercles dont on nous donne les arcs, puis on relie leurs centres respectifs, qu'on nomme A, B et C. Ces cercles sont tangents entre eux aux points X, Y et Z.



Soit $R = m\overline{AZ}$ le rayon de ces cercles. Le triangle ABC est équilatéral, de côté $2R$, et donc l'angle en chaque sommet est de $60°$. Donc, $\angle OAZ = 30°$. Puisque les tangentes d'un cercle sont perpendiculaires au rayon, alors $\angle OZA = 90°$.

Le triangle OZA est donc rectangle avec un angle de $30°$ et un de $60°$. On sait par l'hypothèse du problème que son hypoténuse AO est de mesure $R+1$. Son côté $\overline{OZ}$, opposé à l'angle de $30°$, mesure la demie de l'hypoténuse soit $\frac{R+1}{2}$.

Le théorème de Pythagore donne alors $R^2 + (\frac{R+1}{2})^2 = (R+1)^2$, et on trouve

$$R^2 - 6R - 3 = 0.$$

On obtient finalement $R = 3 + 2\sqrt{3}$.

On peut aussi obtenir la valeur de R par trigonométrie :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(30^\circ) = \frac{m\overline{AZ}}{m\overline{AO}} = \frac{R}{R+1}.$$

On isole R pour trouver le rayon des trois cercles qui est

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 3 + 2\sqrt{3}.$$

Finalement, pour trouver le périmètre de la figure, il s'agit de trois fois la longueur d'un arc de 60°, ce qui équivaut à la longueur d'un arc de 180°, c'est-à-dire, la moitié de la circonférence du cercle. Le périmètre est donc :

$$p = \frac{1}{2}(2\pi R) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \pi\left(3 + 2\sqrt{3}\right).$$

6. **Les turbines.**

Des turbines hydrauliques fonctionnent grâce à l'eau contenue dans un grand réservoir. On suppose que toutes les turbines sont identiques et demandent le même débit constant d'eau pour fonctionner. Le réservoir est lui-même alimenté par un conduit qui fournit de l'eau à taux constant.

- Lorsque le réservoir est rempli à la moitié et que l'on continue à l'alimenter en eau par le conduit, alors on peut faire fonctionner 2 turbines pendant exactement 5 jours avant que le réservoir ne soit vide.
- Lorsque le réservoir est rempli au complet et que l'on continue à l'alimenter en eau par le conduit, alors on peut faire fonctionner 4 turbines pendant exactement 2 jours.

Quel doit être le niveau d'eau dans le réservoir pour que l'on puisse faire fonctionner 3 turbines pendant exactement 3 jours avant que le réservoir ne soit vide ?

Solution.

Soit R la quantité d'eau d'un demi-réservoir, T la quantité d'eau utilisée par une turbine en une journée, et E la quantité d'eau fournie par le conduit d'eau en une journée. On a alors les équations :

$$\begin{aligned} 10T &= R + 5E \\ 8T &= 2R + 2E \\ 9T &= xR + 3E \end{aligned}$$

En soustrayant la demie de la deuxième équation de la première, on obtient directement $6T = 4E$ et donc $T = \frac{2}{3}E$. On peut alors remplacer T par $\frac{2}{3}E$ dans la première équation pour obtenir $10 \cdot \frac{2}{3}E = R + 5E$. On isole R pour obtenir $R = \frac{5}{3}E$.

La troisième équation peut alors être exprimée uniquement en fonction de E, en remplaçant R et T. Cela donne : $6E = \frac{5x}{3}E + 3E$, d'où $x = \frac{9}{5}$. Comme R est le demi-réservoir, on obtient que le réservoir doit être rempli aux $\frac{9}{10}$.