Solutions du concours AMQ 2025, ordre secondaire.

1. **Rectangles d'aire 2025**. Combien de rectangles différents ont des côtés de longueurs entières et une aire de 2025 cm^2 ?

   Solution.
   L'aire d'un rectangle dont les côtés sont de mesure a et b est ab. Puisque l'on veut que $ab = 2025$, alors a doit être un diviseur de 2025 : cela suffit, puisqu'alors $b = 2025/a$ est bien un entier, et le rectangle de côtés de mesure a et b est un rectangle qui vérifie les hypothèses du problème.

   Pour trouver le nombre de diviseurs de 2025, il est utile de considérer sa factorisation première. Comme $2025 = 3^4 \times 5^2$, chacun des diviseurs est de la forme $3^n \times 5^m$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et $m = 0, 1, 2$. On a donc $5 \times 3 = 15$ diviseurs, qui sont autant de valeurs possibles pour a.

   Dans le cas où $a = b$ (ici, $a = b = 45$) on obtient le rectangle (qui est de forme carrée) une seule fois. Il y a donc un rectangle à compter ici, pour cette valeur de a.

   Lorsque $a \neq b$, le rectangle de côtés a et b est isométrique au rectangle de côtés b et a, et ce rectangle apparaît donc pour deux valeurs distinctes de a. Il y a donc $14/2 = 7$ rectangles pour ces 14 valeurs de a.

   Il y a donc 8 rectangles au total.

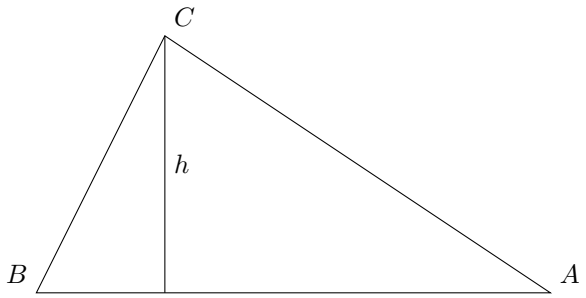
2. **Cent moineaux.**

   Sur une longue branche d'arbre, cent moineaux sont assis côte à côte. Tout d'un coup, deux de ces oiseaux quittent la branche, séparant ainsi en trois groupes les moineaux restants. On considère qu'un groupe de moineaux peut être formé d'un ou plusieurs moineaux (mais pas d'aucun).

   Combien de paires différentes de moineaux ont pu quitter la branche ?

   Solution.
   Numérotons les positions des moineaux de 1 à 100, et soit k et j les positions des deux moineaux qui s'envolent, en posant $k < j$. On ne peut avoir $k = 1$ ou $j = 100$. Si on compte tous les couples possibles avec cette seule restriction, il y en a $\frac{98\times97}{2} = 49 \times 97$. Il faut ensuite enlever tous les couples avec $j = k + 1$ puisque les moineaux ne peuvent pas être voisins (pour créer trois groupes) : il y en a 97 (pour k allant de 2 à 98). Il reste donc $48 \times 97 = 4656$ couples possibles.

3. **Un triangle comme les autres**. Le triangle rectangle ΔABC a un angle droit au sommet C. Si la hauteur h abaissée de C est de 15 cm et que le périmètre du triangle est de 75 cm, quelle est la longueur de son hypoténuse ?



   Solution.
   Soit a, b et c les longueurs des côtés BC, CA et AB respectivement. Le Théorème de Pythagore nous donne

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

   L'aire du triangle est donnée par $\frac{ch}{2}$ et aussi par $\frac{ab}{2}$, et donc

$$ab = ch = 15c,$$

où on a utilisé que $h = 15$ (en omettant ici, et dans la suite, les unités de mesure). (On peut aussi obtenir cela par similitude de triangle.)

De plus, en utilisant le périmètre, on a $a + b = 75 - c$. Si l'on met les deux termes de cette équations au carré, on obtient

$$a^2 + 2ab + b^2 = (75 - c)^2.$$

En remplaçant ab par $15c$ et $a^2 + b^2$ par c^2 dans cette équation, on obtient

$$c^2 + 30c = (75 - c)^2.$$

Lorsque l'on fait le développement du terme de droite, on obtient

$$c^2 + 30c = c^2 - 150c + 75^2$$

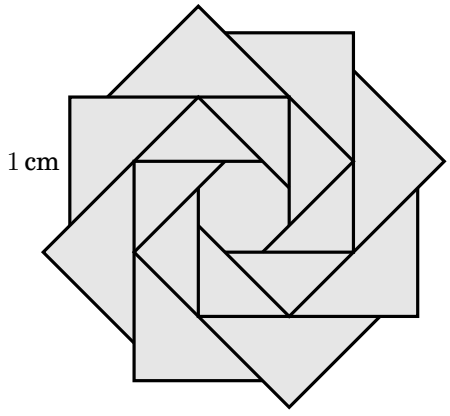
d'où on tire que $180c = 75^2$, et donc après simplification $c = 125/4 = 31,25$. Notons que la réponse était acceptée en notation décimale ou sous forme de fraction.

4. **Albert ou Bertrand ?** Albert et Bertrand jouent au jeu suivant. À tour de rôle, en débutant par Albert, chacun doit prendre 2, 3, 5 ou 6 jetons d'une pile qui contient initialement 40 jetons. Le dernier à pouvoir jouer gagne la partie, ce qui se produit quand il ne reste que 0 ou 1 jeton dans la pile après son coup.

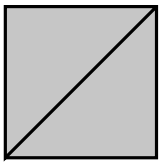
   Le jeu devient vite monotone car l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante : il peut en effet s'assurer de gagner toutes les parties en jouant bien. Qui est ce joueur, et quelle est sa stratégie gagnante ? On doit bien expliquer la stratégie, et ce pourquoi elle mène toujours à la victoire.

   Solution.
   Albert a 4 coups possibles, et pour chacun, Bertrand peut jouer de telle sorte que la somme de leurs deux coups soit 8. Bertrand peut donc jouer son premier coup pour que la somme soit 8, puis son deuxième coup pour qu'elle soit 16, et ainsi de suite jusqu'à son cinquième coup qui permet d'avoir une somme de 40 (qui est un multiple de 8). Il est donc certain de gagner s'il joue bien.

5. **Le tourbillon**. La figure suivante est formée par l'assemblage de 8 copies d'un même rectangle auquel il manque exactement un côté. Ces rectangles sont placés de manière à s'encastrer les uns dans les autres afin que les triangles formés soient tous isocèles. **Quelle est l'aire de cette forme sachant que le petit côté du rectangle mesure** 1 cm **?**

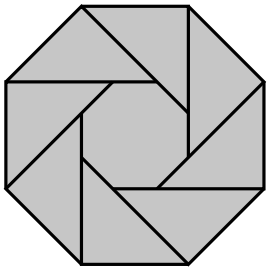


   Solution.
   On peut séparer la forme en deux groupe de morceaux. Premièrement, on peut regrouper les 8 grand triangles qui sont des triangles rectangles isocèles. On obtient 4 grand carrés de côté 1 cm pour une aire de 4 cm^2.



Ce qu'il nous reste est un octogone régulier. Les grands segments dans l'octogone sont de mesure 1 cm. Ils sont l'hypothénuse de triangles rectangles isocèles. Donc le côté est de mesure

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{cm}.$$



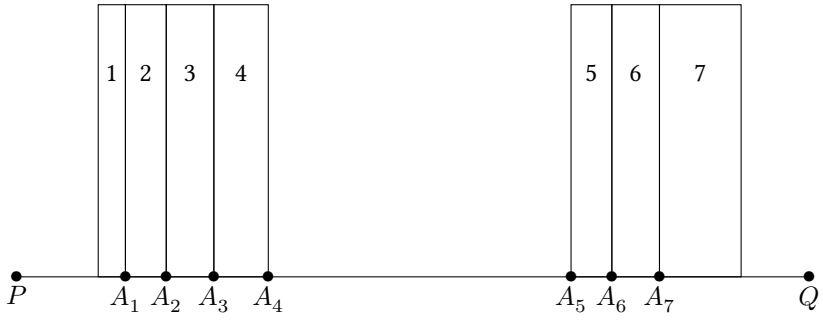
Le calcul de l'aire d'un octogone régulier sachant la longueur de son côté peut être obtenue de diverses manières : on peut l'obtenir en inscrivant l'octogone dans un carré dont les côtés mesurent $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$, et en soustrayant alors l'aire des 4 petits triangles qui sont dans le carré sans être dans l'octogone. On obtient ainsi

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2-\frac{1}{2}\,\text{cm}^2=1+\sqrt{2}\,\text{cm}^2.$$

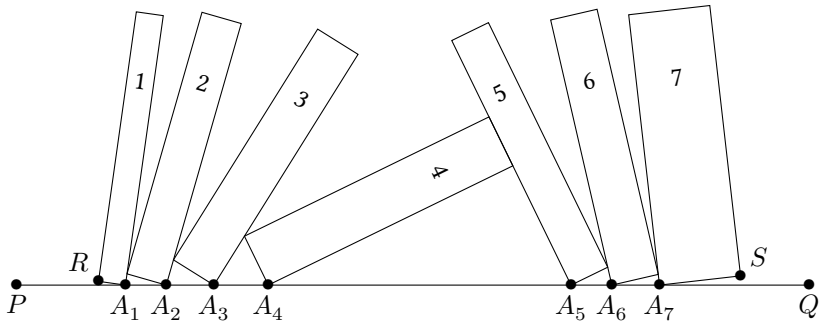
Ainsi, l'aire totale est de

$$4+\left(\sqrt{2}/2+1\right)^2-\frac{1}{2}\,\text{cm}^2=5+\sqrt{2}\,\text{cm}^2.$$

6. **Sept livres bien rangés**. Sept livres sont déposés sur une étagère représentée par le segment $\overline{PQ}$; vus de côté, ils ont la forme de rectangles de différentes largeurs. Mis à part l'espace séparant les livres 4 et 5, tous les livres sont bien collés les uns aux autres.



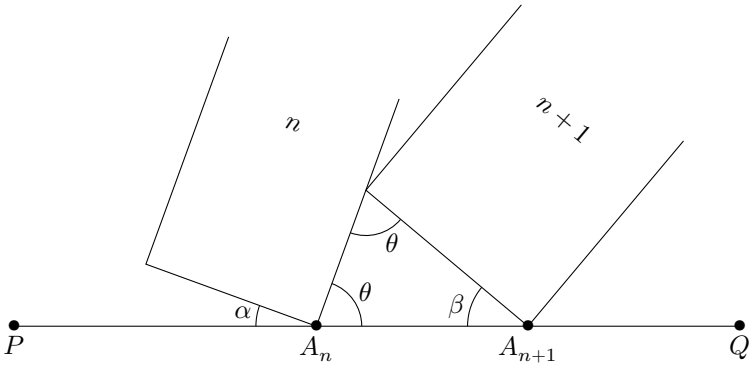
Suite à un léger tremblement de terre, le livre n a pivoté sur son sommet A_n (pour $n=1,\ldots,7$) de sorte que le dessus du livre 4 se retrouve sur le côté du livre 5, et chacun des autres livres est appuyé sur le coin soulevé de son voisin tel qu'illustré ci-dessous.



Nommons R le coin soulevé du livre 1 et S celui du livre 7.
Sachant que la mesure de l'angle $\angle PA_1R$ est 9°, quelle est la mesure de $\angle QA_7S$? Justifier clairement votre réponse.

Solution.

Notons d'abord que le triangle formé sous chaque livre est isocèle, car deux de ses côtés sont mesurés par la base du livre, qui a s implement pivoté. Ce triangle possède donc deux angles égaux, dénotés θ dans la figure (agrandie) ci-dessous.



Puisque le coin de chaque livre est un angle droit, alors $\alpha + 90^\circ + \theta = 180^\circ$, d'où $\alpha + \theta = 90^\circ$. Par ailleurs, la somme des angles d'un triangle est de 180°, donc $2\theta + \beta = 180^\circ$. Ainsi,

$$\beta = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha.$$

Donc l'angle sous le livre n double lorsqu'on passe au livre $n+1$ dans la partie gauche de la figure ! L'angle sous le livre 4 est donc huit fois plus grand que l'angle sous le livre 1, qui était de 9°. Le coin du livre 4 a donc un angle de 72°.

La base du livre 5 étant perpendiculaire à celle du livre 4, son coin soulevé a donc un angle complémentaire à celui du livre 4, c'est à dire, 18°. Enfin, par un raisonnement symétrique à celui ci-dessus, l'angle se trouve à être divisé en deux lorsqu'on passe du livre n au livre $n+1$ dans la partie droite de la figure. L'angle sous le livre 7 est donc de $\dfrac{18^\circ}{4} = 4{,}5^\circ$.