Concours annuel de l'AMQ 2026, ordre secondaire.

1. **Fonction affine.**

   Soit a et b deux nombres réels non nuls et soit f une fonction telle que $f(x) = ax+b$ pour tout x réel. **Déterminer les valeurs de a et b** sachant que

   $$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{et} \qquad f(a) = f\left(\frac{1-b}{a}\right) + f\left(\frac{-b^2}{a}\right).$$

2. **Casse-tête.**

   Un casse-tête standard rectangulaire a le même nombre de pièces qui se retrouvent sur les côtés que de pièces qui ne le sont pas. **Combien ce casse-tête a-t-il de morceaux ?** Justifier clairement et donner toutes les solutions.

   Note. Un casse-tête standard a le même nombre de pièces sur chaque ligne, et le même nombre sur chaque colonne.

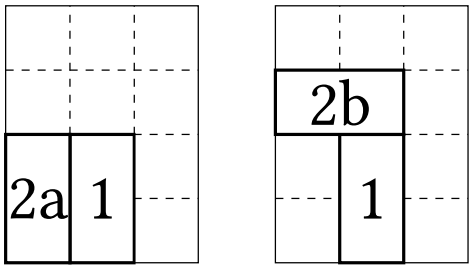
3. **Angie et Bastien.**

   Angie et Bastien jouent au jeu suivant, inspiré du jeu de Tétris. À tour de rôle, en débutant par Angie, chacun place un domino 2 par 1 dans une grille rectangulaire de largeur 3 et de hauteur 4 en respectant le mouvement suivant.

   Le domino est placé par le joueur en haut de la grille : horizontalement vis-à vis deux des trois colonnes, ou verticalement vis-à-vis une colonne. Puis, il est descendu vers le bas jusqu'à ce qu'il ne puisse plus descendre. Aucun autre mouvement n'est permis.

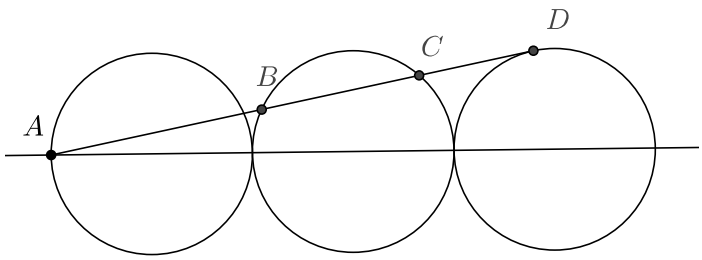
   L'un des deux joueurs peut s'assurer de gagner toutes les parties en jouant bien. **Qui est ce joueur, et quelle est sa stratégie gagnante ? On doit bien expliquer la stratégie, et ce pourquoi elle mène toujours à la victoire.**

   Exemples de coups possibles. Sur la figure, si Angie a inséré le domino 1 verticalement dans la deuxième colonne, alors Bastien pourrait par exemple placer le deuxième domino de sorte qu'il soit en position 2a ou 2b. (Ce ne sont pas les seuls coups possibles pour Bastien.) Le joueur qui est le dernier à pouvoir placer un domino a gagné la partie.



4. **Tangente et trois cercles.**

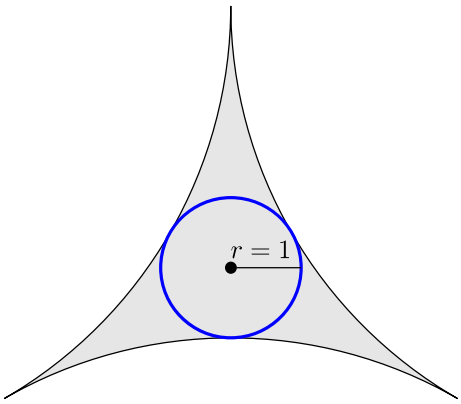
   Sur la figure, les trois cercles de rayon 12 cm sont tangents entre eux. La droite AD est tangente au troisième cercle en D et coupe le deuxième cercle en B et C. **Déterminer la mesure de BC.**



5. **Triarc.**

   Sur la figure, un cercle de rayon 1 est tangent à trois grands arcs de cercles, tous les trois égaux et tangents entre eux. **Quel est le *périmètre* de la figure délimitée par ces trois arcs ?**

   Note. Des arcs sont tangents entre eux si les cercles qui les contiennent sont tangents.



6. **Les turbines.**

   Des turbines hydrauliques fonctionnent grâce à l'eau contenue dans un grand réservoir. On suppose que toutes les turbines sont identiques et demandent le même débit constant d'eau pour fonctionner. Le réservoir est lui-même alimenté par un conduit qui fournit de l'eau à taux constant.

   - Lorsque le réservoir est rempli à la moitié et que l'on continue à l'alimenter en eau par le conduit, alors on peut faire fonctionner 2 turbines pendant exactement 5 jours avant que le réservoir ne soit vide.
   - Lorsque le réservoir est rempli au complet et que l'on continue à l'alimenter en eau par le conduit, alors on peut faire fonctionner 4 turbines pendant exactement 2 jours.

   Quel doit être le niveau d'eau dans le réservoir pour que l'on puisse faire fonctionner 3 turbines pendant exactement 3 jours avant que le réservoir ne soit vide ?