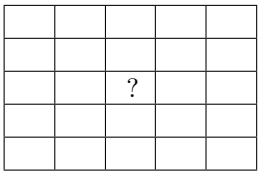
Association
mathématique
du Québec

Concours annuel de l'AMQ, ordre secondaire

Questions de l'édition 2023 du concours annuel de l'AMQ, ordre secondaire.

L'usage de toute forme de calculatrice est interdit. Dans tous les cas où c'est possible, écrire la valeur exacte et non la valeur numérique approchée (par exemple, si $x^2 = 2$, écrire $x = \sqrt{2}$ plutôt que $x \approx 1,414$).

1. Le nombre mystère. On a placé tous les nombres naturels entre 1 et 25 dans une grille 5×5 semblable à celle ci-contre. On a constaté que tous les nombres sur une des deux diagonales (appelons-la la diagonale A) ont un nombre impair de diviseurs. On a aussi remarqué que les nombres sur l'autre diagonale (appelons-la la diagonale B) avaient tous un même nombre premier p comme facteur. Finalement, on a constaté qu'aucun nombre à l'extérieur de la diagonale B n'avait p parmi ses facteurs premiers. Quel nombre est au centre de la grille ?



2. Un système d'équations. Résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 1, \\ y^3 &= 11 - x^2. \end{aligned}$$

Donner votre réponse sous forme de couples de nombres réels (x, y).

3. Racine trigonométrique. Trouver toutes les racines (zéros) de la fonction

$$f(x) = \tan(x) + \sec(x) - \frac{2}{3}\cos(x)$$

situées dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

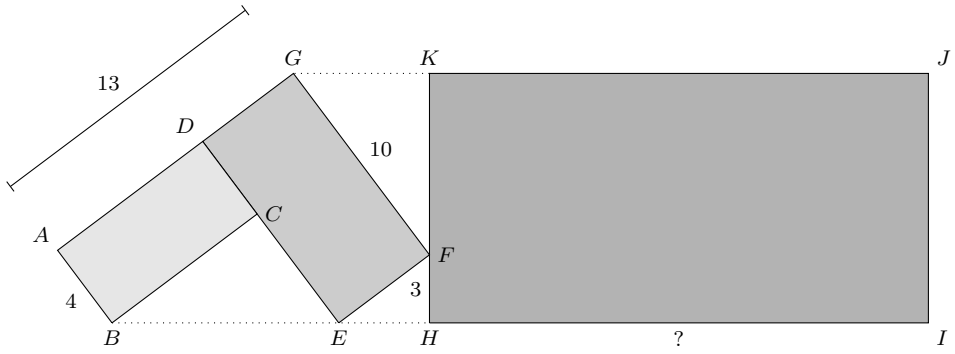
4. Jeu de rayage. Ahmed et Benoit décident de passer le temps en jouant à un nouveau jeu. À tour de rôle, en débutant par Ahmed, chacun doit rayer un nombre de la liste des entiers 2, 3, 4, …, 20, ainsi que tous les nombres qui ne sont pas relativement premiers avec ce nombre. Par exemple, si Ahmed rayait 7 à son premier coup, il devrait aussi rayer 14.

Ils jouent ainsi à tour de rôle, chacun devant rayer un nombre qui n'est pas encore rayé. Le gagnant est celui qui raye le dernier nombre.

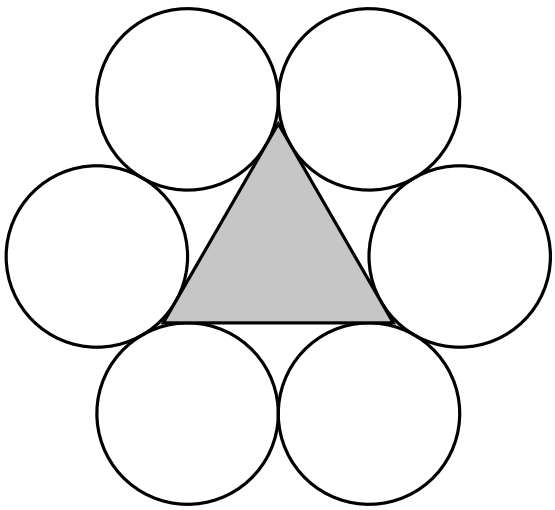
L'un des deux joueurs a une stratégie gagnante : il peut en effet s'assurer de gagner toutes les parties. Qui est ce joueur, et quelle est sa stratégie gagnante ? Il faut non seulement bien expliquer la stratégie, mais aussi bien expliquer pourquoi cela fonctionne à coup sûr.

© Association mathématique du Québec

5. Casse-tête de rectangles. Dans l'illustration ci-dessous, les rectangles $ABCD$, $DEFG$ et $HIJK$ sont semblables. De plus, C est sur le segment $\overline{DE}$, F est sur $\overline{HK}$, E et H sont situés sur $\overline{BI}$ et ce dernier est parallèle à $\overline{GK}$. Sachant que $m\overline{AG} = 13$, $m\overline{AB} = 4$, $m\overline{FG} = 10$ et $m\overline{FH} = 3$, déterminer toutes les valeurs possibles pour la mesure de $\overline{HI}$.
(On suppose que $m\overline{HI} > m\overline{HK}$.)



6. Le triangle encerclé. Sur la figure ci-dessous, le triangle ombragé est tangent à 6 cercles de rayon 1.

De plus, les paires de cercles adjacents se touchent en un seul point.

Les cercles et le triangle sont placés de sorte à former une figure ayant 3 axes de symétries. Quelle est l'aire du triangle ?