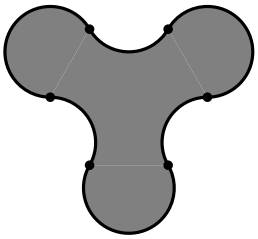
Association
mathématique
du Québec

Concours de l'Association mathématique du Québec

Solutionnaire du concours

1. La toupie à main

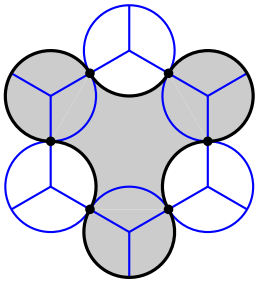
Sur la figure suivante, on a représenté le dessus d'une toupie à main. Les courbes entre deux points sont tous des arcs de cercle de rayon 1 cm. En leur point de contact, les tangentes de deux courbes sont confondues. De plus, la toupie est bien équilibrée, c'est-à-dire qu'elle possède trois axes de symétrie.



Trouvez l'aire représentée par la figure.

Solution:

On complète les cercles sur la figure et on ajoute quelques lignes. Par symétrie, on sait que les centres de ces cercles forment un hexagone régulier.



En bougeant trois des tiers de cercle extérieurs de la toupie, on peut reconstituer complètement l'hexagone. Il nous reste par la suite trois autre tiers de cercle.

Ainsi, l'aire de la toupie correspond à l'aire du cercle de rayon 1 plus l'aire de l'hexagone de côté 2. Cela donne $A = 6\sqrt{3} + \pi$ cm^2.

2. Les trois amies

Amandine, Béatrice et Camille sont trois bonnes amies. Il y a dix ans, Amandine avait le double de la somme des âges de Béatrice et de Camille. Aujourd'hui, Amandine a le triple de la différence des âges de Béatrice et de Camille. Nous savons de plus que Camille a l'âge que Béatrice avait lorsque Béatrice avait exactement le tiers de l'âge d'Amandine.

Quels sont les âges des trois amies ?

Solution:

Nous écrivons les équations linéaires régissant les trois énoncés.

1- « Il y a dix ans, Amandine avait le double de la somme des âges de Béatrice et de Camille. »

$$A - 10 = 2(B - 10 + C - 10) \quad \Longrightarrow \quad A = 2(B + C) - 30$$

2- « Aujourd'hui, Amandine a le triple de la différence des âges de Béatrice et de Camille. »

$$A = 3|B - C|$$

3- « Nous savons de plus que Camille a l'âge que Béatrice avait lorsque Béatrice avait exactement le tiers de l'âge d'Amandine. »

$$C = B - X \quad où \quad B - X = \frac{1}{3}(A - X)$$

L'énoncé 3 nous indique que $B > C$*, donc l'énoncé 2 équivaut à :* $A = 3(B - C)$.

Par l'énoncé 3, nous avons $X = B - C$*, donc l'énoncé 2 nous donne :* $A = 3X$.

L'énoncé 3 nous donne enfin :

$$B - X = \frac{1}{3}(3X - X) \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{5}{3}X.$$

On remet tout dans l'énoncé 1,

$$3X = 2\left(\frac{5}{3}X + C\right) - 30 \quad \Longrightarrow \quad C = 15 - \frac{1}{6}X.$$

Ainsi, on peut trouver la valeur de X,

$$X = B - C = \frac{5}{3}X - \left(15 - \frac{1}{6}X\right) \quad \Longrightarrow \quad X = 18.$$

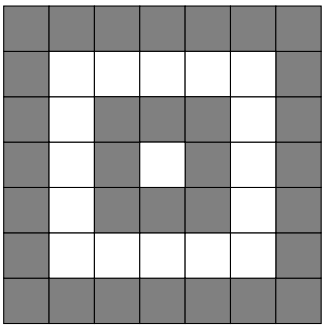
Le reste suit,

$$A = 3X = 54, \quad B = \frac{5}{3}X = 30, \quad C = 15 - \frac{1}{6}X = 12.$$

Réponse : *Amandine a* 54 *ans, Béatrice* 30 *ans et Camille* 12 *ans.*

3. Qui commence ?

Deux joueurs jouent à un jeu sur un damier carré 7×7, dont les cases d'une même couronne sont colorées de la même couleur (voir figure). Les joueurs placent tour à tour des pièces sur le damier, mais doivent respecter les règles suivantes :



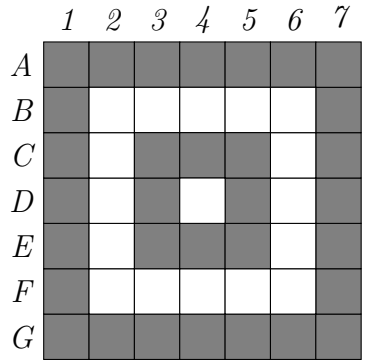
- Le premier joueur joue sur le contour du carré.
- À son tour, chaque joueur doit poser sa pièce sur l'une des cases voisines de la pièce qui vient d'être jouée par l'autre joueur (il est interdit de jouer en diagonale). Cette case ne doit pas déjà être occupée par une pièce.
- Dès qu'un joueur pose une pièce sur une nouvelle couronne, il est interdit de revenir à la couronne précédente pour le reste de la partie.

Un joueur perd la partie lorsqu'il est impossible pour son adversaire de jouer un prochain coup.

Si vous aviez à jouer à ce jeu, préféreriez-vous débuter la partie ou jouer en second ? Selon votre choix, trouvez une stratégie permettant de gagner *toutes* les parties. Vous devez présenter, par des arguments rigoureux, pourquoi votre stratégie est infaillible.

Solution:

Il vaut mieux ***débuter*** *la partie. Soit Alice la joueuse qui débute et Bob celui qui joue en second. Voici une stratégie gagnante pour Alice, parmi d'autres possibles. Commençons par nommer les cases avec un système de coordonnées.*



Décrivons la stratégie à partir de la fin. L'objectif est de forcer Bob soit à jouer au centre (D4), ou dans le coin d'une couronne alors que les deux cases adjacentes de la même couronne sont déjà occupées (par exemple, si Bob joue en B2 alors que B3 et C2 sont occupées). Dans toutes ces situations, la partie se termine en une victoire pour Alice. Alors comment y parvenir ?

Notons que si Alice parvient à jouer la première sur une des cases C4, D3, D5 ou E4, alors c'est gagné. Puisque Bob ne veut pas jouer en D4, il n'aura d'autre choix que de jouer sur la plus petite couronne, et il suffira à Alice de le suivre en jouant sur la case latérale suivante. Ainsi, les seules cases accessibles à Bob sur cette couronne seront les quatre coins (C3, C5, E3

et E5), puisqu'Alice s'empressera de remplir les autres cases. Tôt ou tard, Bob sera coincé dans un coin et perdra la partie.

La situation est similaire à la couronne précédente. Alice doit jouer la première sur une des cases suivantes : B3, B5, C2, C6, E2, E6, F3 ou F5. En effet, si elle y parvient, alors Bob a trois ripostes possibles :

(a) jouer sur une des cases latérales B4, D2, D6 ou F4 : alors Alice peut riposter en changeant de couronne (C4, D3, D5 ou E4) et la partie est gagnée d'après le paragraphe précédent ;

(b) changer de couronne : mais il entrera dans la nouvelle couronne par un coin, ce qui laisse à Alice l'opportunité de jouer la première sur une des quatre cases C4, D3, D5 ou E4 et, par le paragraphe précédent, de remporter la partie ;

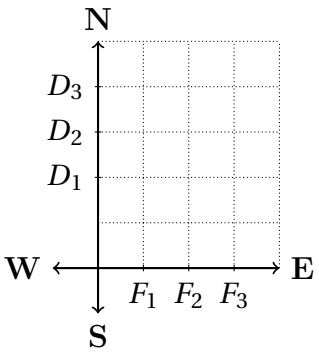
(c) jouer dans un coin (B2, B6, F2 ou F6) : alors soit il est coincé car les deux cases voisines sont occupées, ou sinon, l'une des deux cases voisines est encore disponible pour Alice, et on peut répéter cet argument à nouveau.

Mais comment Alice peut-elle s'assurer d'être la première à jouer sur l'une de ces huit cases ? Regardons la situation de la couronne extérieure.

L'argument est en fait le même ! Il suffit pour Alice d'être la première à jouer sur l'une des huit cases suivantes : A2, B1, A6, B7, F1, G2, F7 ou G6. Alors Bob a encore seulement trois ripostes possibles : les mêmes qu'au paragraphe précédent !

Mais comment Alice peut-elle s'assurer d'être la première à jouer sur l'une de ces huit cases ? Facile ! C'est elle qui commence la partie, alors elle n'a qu'à choisir de commencer là.

4. Les fourmis

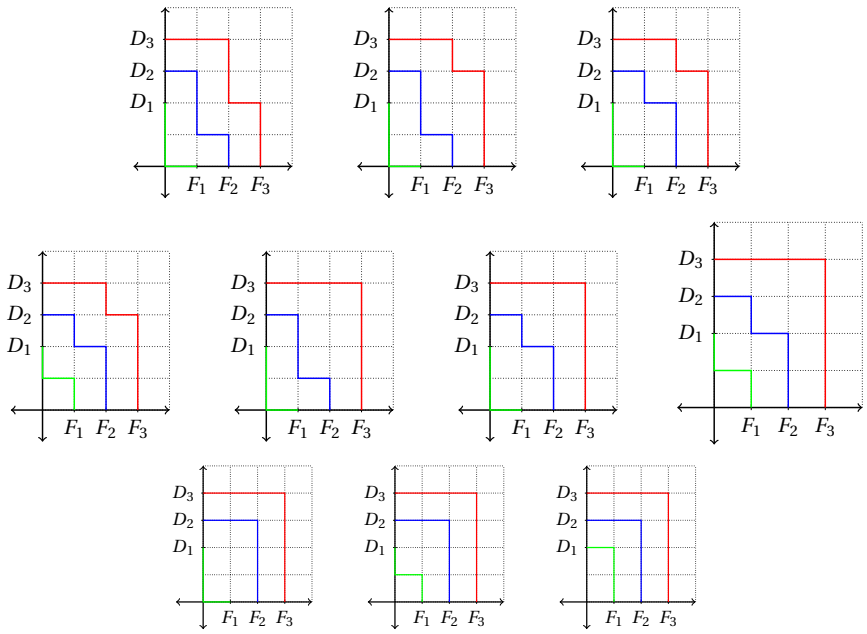


Trois fourmis sont positionnées sur le plan en $D_1 = (0,2)$, $D_2 = (0,3)$ et $D_3 = (0,4)$. Chaque fourmi se déplace à coups de pas entiers de longueur 1 et ne peut faire des pas que vers l'est (**E**) ou vers le sud (**S**) (aucun pas vers le nord ou vers l'ouest). La fourmi en position D_1 doit se rendre au point $F_1 = (1,0)$, celle en position D_2 au point $F_2 = (2,0)$ et celle en position D_3 au point $F_3 = (3,0)$.

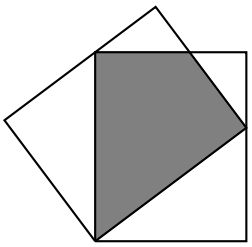
Si les chemins des trois fourmis ne peuvent se toucher en aucun point commun, alors de combien de façons peuvent-elles se rendre du point de départ au point d'arrivée ?

Solution:

*Il y a **dix** façons possibles. Les voici.*



5. Les cartons entiers

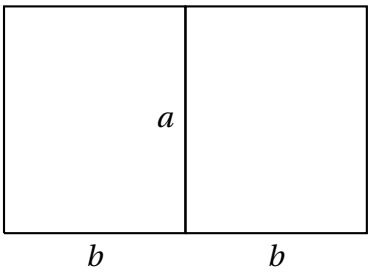


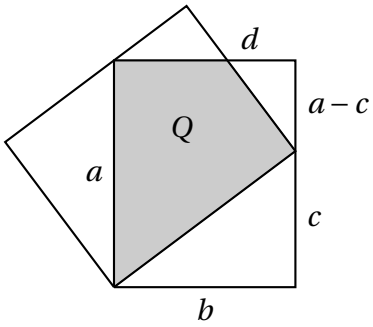
Mathilde possède deux cartons rectangulaires de mêmes dimensions. Ces dimensions (la hauteur et la largeur) sont des nombres entiers de centimètres. La hauteur des cartons est strictement supérieure à leur largeur. Mathilde superpose les deux cartons comme sur la figure ci-contre.

Elle réalise alors que l'aire du quadrilatère formé par la superposition des deux cartons (en gris sur la figure) est un nombre entier de centimètres carrés. Quelle est la hauteur minimale que pourraient avoir ces cartons ?

Solution:

Soit a la hauteur et b la largeur des cartons. On dénote par Q l'aire du quadrilatère formé à l'intersection des deux cartons et par c et d les deux côtés formés par cette intersection (voir figure).





Le gros du problème consiste à démontrer que la longueur c est un nombre entier.

Notons d'abord que les deux triangles formés dans chaque carton sont semblables car ils ont les mêmes angles. On trouve donc :

$$\frac{d}{a-c} = \frac{c}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad d = \frac{(a-c)c}{b}$$

On peut alors simplifier l'aire Q.

$$\begin{aligned}
Q &= ab - \frac{bc}{2} - \frac{(a-c)d}{2} \\
&= ab - \frac{bc}{2} - \frac{(a-c)^2 c}{2b} \\
&= ab - \frac{bc}{2} - \frac{(a^2 - 2ac + c^2)c}{2b} \\
&= \frac{1}{2b}\left[2ab^2 - b^2c - a^2c + 2ac^2 - c^3\right] \\
&= \frac{1}{2b}\left[2a^3 - 2a^2c\right] \\
&= \frac{a^2(a-c)}{b}
\end{aligned}$$

En isolant c, on trouve $c = a - \frac{bQ}{a^2}$, et puisque a, b et Q sont des entiers, alors c est un nombre rationnel.

De plus, puisque a et b sont entiers et puisque $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, alors c est la racine carrée d'un nombre entier.

Or, on sait que les seuls nombres rationnels qui sont la racine carrée d'un nombre entier sont eux-mêmes des entiers. Ainsi, c est un entier.

Donc, le triplet (a, b, c) est un triplet pythagoricien. Voici les combinaisons des deux plus petits triplets possibles.

a	b	c	Q
5	3	4	25/3
5	4	3	25/2
10	6	8	100/3
10	8	6	50

La solution est donc 10 *cm pour la valeur de a.*

6. Un nombre diabolique !

Trouvez le nombre représenté par l'expression infinie suivante.

$$\cfrac{6}{\cfrac{6}{\cfrac{6}{\cfrac{6}{\cfrac{6}{\ldots-6}-6}-6}-6}-6}-6+\cfrac{6}{6+\cfrac{6}{6+\cfrac{6}{6+\cfrac{6}{6+\cfrac{6}{6+\ldots}}}}}$$

Solution:

Soit x le nombre suivant.

$$x=6+\cfrac{6}{6+\cfrac{6}{6+\cfrac{6}{6+\cfrac{6}{6+\cfrac{6}{6+\ldots}}}}}$$

Notons que x satisfait l'équation suivante : $x=6+\dfrac{6}{x}$.

Posons $y=-x$. Alors

$$y=-\left(6+\frac{6}{x}\right)=-6-\frac{6}{x}=\frac{6}{-x}-6=\frac{6}{y}-6$$

Ainsi, $y=\dfrac{6}{y}-6$, et en déroulant cette équation à l'infini, on trouve :

$$y=\cfrac{6}{\cfrac{6}{\cfrac{6}{\cfrac{6}{\cfrac{6}{\ldots-6}-6}-6}-6}-6}-6$$

En conclusion, le nombre diabolique recherché n'est nul autre que $y+(x-6)$. Mais puisque $y=-x$, sa valeur est donc tout simplement -6. La réponse est donc -6.