Concours de l'AMQ 2017, ordre secondaire
16 février 2017

Aux candidates, aux candidats

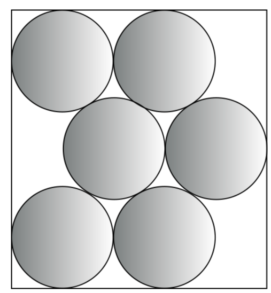
Le Concours de l'Association mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. L'utilisation de la calculatrice est permise mais n'est pas nécessaire. Détaillez vos réponses dans l'espace prévu à cet effet après chaque question.

La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponse, dans le cas d'une solution incomplète. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

---

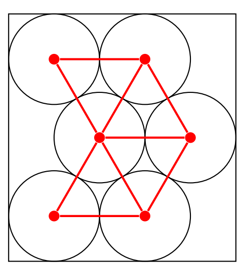
1. Les bouteilles bien rangées

Après le réveillon du nouvel an, le père de Justin lui a demandé d'aller porter les bouteilles vides des invités au dépanneur. Afin de faciliter le transport, Justin a placé six de ces bouteilles dans une boîte qu'il a trouvée, dans laquelle elles entrent tout juste, avec la configuration illustrée ci-contre (vue de haut). Sachant que chaque bouteille a un diamètre de 10 centimètres, quelles sont les dimensions exactes du fond de la boîte ?



Solution :

On relie les centres des cercles par des segments de droite pour former des triangles.



Le rayon de chaque cercle est de $r = 5$ cm. En projetant chacun des centres sur le côté inférieur de la boîte, on trouve qu'elle est composée de cinq rayons. Ainsi, la largeur est :

$$L = 5r = 25 \ cm.$$

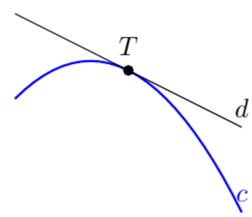
Les trois côtés de chacun des quatre triangles sont composés de deux rayons : ils sont donc tous de $c = 10$ cm. Ainsi, les quatre triangles sont équilatéraux. La hauteur de chacun des triangles peut donc être calculée, par Pythagore ou par trigonométrie, et elle est de $h = 5\sqrt{3}$ cm. En projetant chacun des centres sur le côté gauche de la boîte, on trouve qu'elle est composée de deux rayons et deux hauteurs. Ainsi, la hauteur est :

$$H = 2r + 2h = 10 + 10\sqrt{3} = 10(1 + \sqrt{3}) \ cm.$$

Ou encore, $H \approx 27{,}32$ cm pourrait être accepté.

2. Si la tangente se maintient

Une droite d est *tangente* à une courbe c donnée si elle touche cette courbe en un point T mais sans la traverser en ce point, comme sur la figure ci-contre.
Pour quelles valeurs de k la droite d'équation $y = x + k$ est-elle tangente à la parabole d'équation $y = x^2 + kx + 1$?



Solution :

Soit $T = (x, y)$ le point de tangence. Ce point appartient à la fois à la droite et à la parabole. Donc,

$$\begin{aligned} y &= y \\ x + k &= x^2 + kx + 1 \\ 0 &= x^2 + (k-1)x + (1-k). \end{aligned}$$

Puisque la droite est tangente à la parabole, alors T est le seul *point d'intersection entre la droite et la parabole. L'équation $0 = x^2 + (k-1)x + (1-k)$ a donc une unique solution, ce qui* *signifie que son discriminant est nul. Ainsi,*

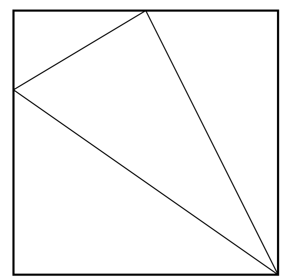
$$\begin{aligned} 0 &= b^2 - 4ac \\ &= (k-1)^2 - 4(1-k) \\ &= (k-1)^2 + 4(k-1) \\ &= (k-1)((k-1)+4) \\ &= (k-1)(k+3). \end{aligned}$$

Donc, $0 = (k-1)(k+3)$ *et les deux solutions possibles sont* $k = 1$ *et* $k = -3$.

3. Triangulation impossible !

Une *triangulation* est un découpage d'une figure géométrique en un certain nombre de triangles. Par exemple, la figure ci-contre montre une triangulation d'un carré en quatre triangles.

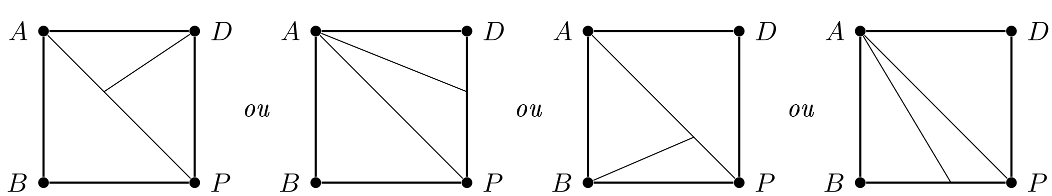
Démontrer qu'il n'existe aucune triangulation du carré en seulement trois triangles, telle que ces trois triangles aient tous la même aire.



Solution :

Soit une triangulation du carré en trois triangles. Puisqu'il y a quatre coins dans un carré, alors au moins un des coins touche à au moins deux des trois triangles (sinon, il faudrait au moins quatre triangles pour toucher les quatre coins). Appelons ce coin A. *Puisqu'il touche à au moins deux triangles, alors il y a un segment* $\overline{AP}$ *qui traverse le coin* A. *Regardons les différents cas possibles.*

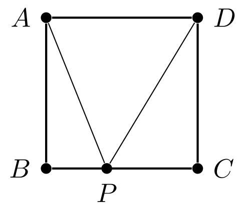
1. P est le coin du carré opposé à A.
Alors le segment $\overline{AP}$ *divise le carré en deux grands triangles. La triangulation est complétée en découpant un de ces deux grands triangles en deux triangles plus petits.*



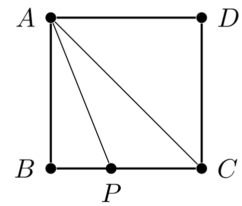
Dans tous les cas, l'autre grand triangle est intouché, et son aire est la moitié de celle du carré.

2. P se trouve sur un des côtés du carré opposés à A.

   Disons que P est sur le côté $\overline{BC}$ (le cas $P \in \overline{CD}$ est similaire). Alors les deux seules triangulations possibles sont les suivantes.

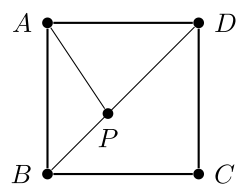
   ou

   Dans la figure de gauche, le triangle ΔAPD a une aire égale à la moitié de celle du carré. Dans celle de droite, c'est le triangle ΔACD qui a une aire égale à la moitié de celle du carré.

3. P se trouve quelque part à l'intérieur du carré.

   Alors une triangulation en trois triangles n'est possible que si P se trouve sur le segment $\overline{BD}$.

   Dans ce cas, le triangle ΔBCD a une aire égale à la moitié de celle du carré.

*Ainsi, dans tous les cas, la triangulation comporte un triangle dont l'aire est la moitié de celle du carré. Mais on demandait à ce que l'aire de chacun des triangles soit d'*un tiers *du carré, et non d'une moitié. La triangulation recherchée n'existe donc pas.*

4. Un grand nombre de chiffres !

Quels sont les deux derniers chiffres (c'est-à-dire, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités) du nombre $7^{(9^{(3^5)})}$?

Solution :

*En calculant successivement des puissances de 7, on remarque (*on ne demande pas de le démontrer rigoureusement !*) que les deux derniers chiffres suivent toujours la suite périodique suivante.*

$$07, 49, 43, 01, 07, 49, 43, 01, \ldots$$

Autrement dit :

— $n = 4k \implies 7^n$ *se termine par* 01,

— $n = 4k+1 \implies 7^n$ *se termine par* 07,

— $n = 4k+2 \implies 7^n$ *se termine par* 49,

— $n = 4k+3 \implies 7^n$ *se termine par* 43.

Il ne reste donc plus qu'à découvrir de laquelle de ces quatre formes est $9^{(3^5)}$.

En calculant successivement des puissances de 9*, on remarque (*on ne demande pas de le démontrer rigoureusement !*) qu'elles sont toutes de la forme* $4k+1$.

$$\begin{array}{lll}
9^0 & = 1 & = 4 \cdot 0 + 1 \\
9^1 & = 9 & = 4 \cdot 2 + 1 \\
9^2 & = 81 & = 4 \cdot 20 + 1 \\
9^3 & = 729 & = 4 \cdot 182 + 1 \\
9^4 & = 6561 & = 4 \cdot 1640 + 1 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Donc, en particulier, $9^{(3^5)}$ *est de la forme* $4k+1$*. Le nombre* $7^{(9^{(3^5)})}$ *se termine donc par* 07.

5. Trouvez le triplet

Trois nombres entiers consécutifs, $a < b < c$, satisfont l'équation suivante.

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{4986}{abc}$$

Trouvez ces trois nombres.

Solution :

Puisque les trois nombres sont consécutifs, on peut écrire $b = a+1$ *et* $c = a+2$*. Donc :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} + \frac{2}{a+1} + \frac{3}{a+2} &= \frac{4986}{a(a+1)(a+2)} \\
\frac{(a+1)(a+2)}{\cancel{a(a+1)(a+2)}} + \frac{2a(a+2)}{\cancel{a(a+1)(a+2)}} + \frac{3a(a+1)}{\cancel{a(a+1)(a+2)}} &= \frac{4986}{\cancel{a(a+1)(a+2)}} \\
(a^2+3a+2) + (2a^2+4a) + (3a^2+3a) &= 4986 \\
6a^2 + 10a + 2 &= 4986 \\
6a^2 + 10a - 4984 &= 0
\end{aligned}$$

En utilisant la formule quadratique,

$$\begin{aligned} a &= \frac{-10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(6)(-4984)}}{2(6)} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{119716}}{12} \\ &= \frac{-10 \pm 346}{12} \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions possibles :

$$a = \frac{-10 + 346}{12} = 28 \qquad ou \qquad a = \frac{-10 - 346}{12} = -\frac{89}{3}\,.$$

Puisque $-\frac{89}{3}$ *n'est pas un nombre entier, il faut rejeter cette solution.*

Ainsi, $a = 28$, $b = 29$ *et* $c = 30$.

6. Un truel à Pile-ou-Face

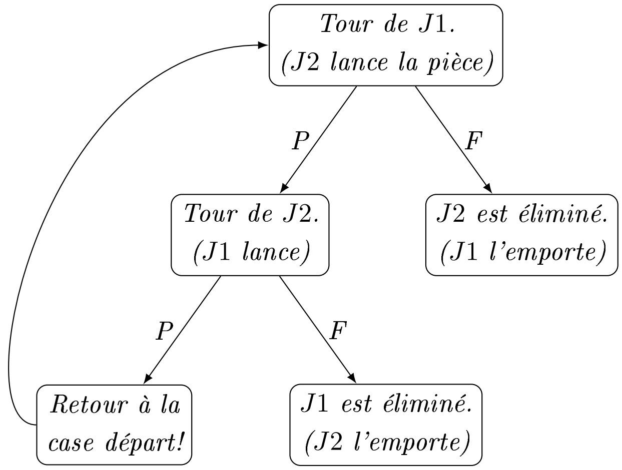
Agathe, Bertrand et Cédric jouent a un jeu à tour de rôle : d'abord Agathe, ensuite Bertrand, et finalement Cédric. Après Cédric, Agathe recommence, et ainsi de suite.

À son tour, chaque joueur désigne un autre joueur encore en jeu pour lancer une pièce de monnaie. Si la personne désignée obtient *Face*, alors elle est immédiatemment éliminée. Si elle obtient *Pile*, alors elle peut continuer le jeu. La dernière personne en jeu remporte la partie.

Agathe et Bertrand décident de s'allier contre Cédric. Ils le désignent donc à chaque tour pour lancer la pièce de monnaie, tant qu'il est présent sur le jeu. Cédric, quant à lui, désigne toujours Bertand s'il n'est pas éliminé. Quelle est la probabilité que Cédric remporte la partie ?

Solution :

On commence par analyser le problème lorsqu'il ne reste que deux joueurs. On veut déterminer les probabilités de victoire pour chacun de ces deux joueurs. Les joueurs s'appellent $J1$ *et* $J2$*, et* $J1$ *commence. Le déroulement du jeu est alors le suivant.*

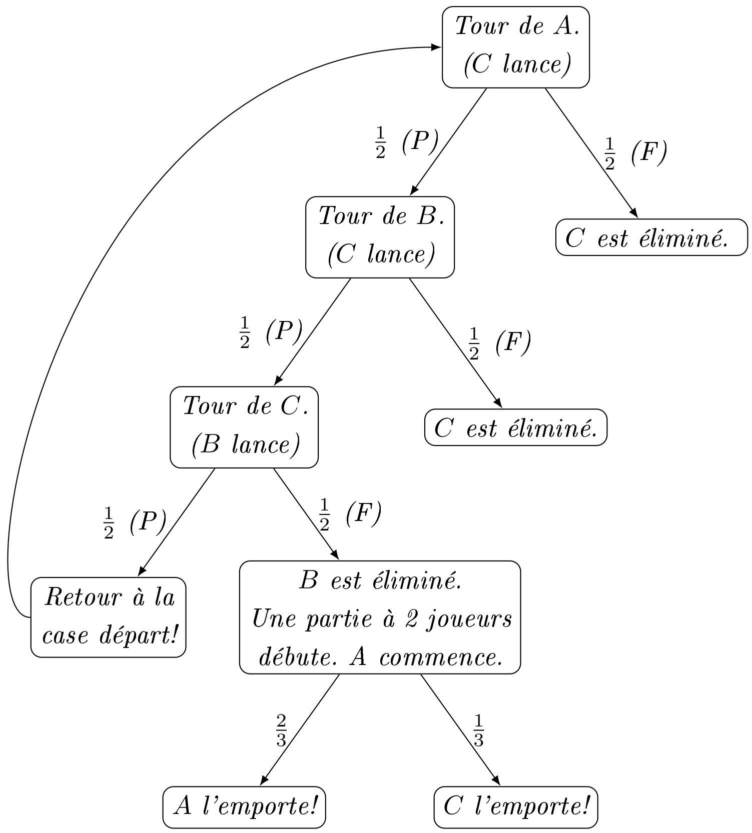


Chacune des éventualités (P ou F) dans ce diagramme a une chance sur deux de se produire. Si p est les chances pour J1 d'emporter la partie au début du jeu, le diagramme nous donne donc l'équation suivante.

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p + 0\right) + \frac{1}{2}$$

En isolant la variable p, on trouve $p = \frac{2}{3}$. Le joueur 1 a donc 2 chances sur 3 de l'emporter. Par conséquent, le joueur 2 a une chance sur 3 de l'emporter.

Passons maintenant au problème à trois joueurs décrit dans la mise en situation. Les joueurs sont nommés A (Agathe), B (Bertrand) et C (Cédric) et le déroulement du jeu, jusqu'à l'élimination ou la victoire de Cédric, est le suivant. En utilisant le calcul ci-haut, la probabilité de chaque événement est indiquée sur les flèches.



Soit c la probabilité que Cédric remporte la partie à partir du point de départ. En suivant le diagramme, on obtient l'équation suivante.

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{3}\right)\right) + 0\right) + 0$$

En isolant c dans cette équation, on trouve : $c = \dfrac{1}{21}$.