Association mathématique du Québec

Solutionnaire du Concours 2016, ordre secondaire

Le mercredi 10 février 2016, en matinée

Le Concours de l'Association mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. L'utilisation de la calculatrice est permise mais n'est pas nécessaire.

La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponse, dans le cas d'une solution incomplète. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

1 La fortune du père [suggéré par T. Hammouche]

Sentant sa fin arriver, un vieillard appelle ses enfants à son chevet afin de leur partager sa fortune. Il demande au plus vieux de prendre une pièce d'or de son coffre et le dixième du reste. Après que l'aîné se soit servi, le père demande au deuxième plus âgé de ses enfants de prendre deux pièces d'or et le dixième du reste. Il continue ainsi avec le k-ième plus âgé des enfants auquel il demande de prendre k pièces d'or et le dixième du reste. Le dernier enfant reçoit seulement le reste du coffre.

Si les enfants ont tous reçu la même quantité d'or, alors combien d'enfants avait le vieillard et combien d'or chacun a-t-il reçu ?

Solution *Soit f la fortune du père en pièces d'or et q l'héritage de chaque enfant. La première phrase se traduit par la contrainte*

$$q = 1 + \frac{f-1}{10}$$

et le calcul de l'héritage du deuxième satisfait

$$q = 2 + \frac{f-q-2}{10}\,.$$

Évidemment, on pourrait introduire une autre inconnue, le nombre d'enfants, et écrire une équation pour chaque enfant, mais nous avons déjà deux équations à deux inconnues. On isole f de la première équation et on obtient

$$f = 10q - 9\,,$$

ce que l'on substitue immédiatement dans dix fois la deuxième équation,

$$10q = 20 + \big((10q - 9) - q - 2\big)\,.$$

Après quelques simplifications, on déduit

$$q = 9, \qquad \text{et} \qquad f = 81\,.$$

Les 9 *enfants ont chacun reçu* 9 *pièces d'or.*

2 J'ai l'aire d'une moitié [Centrale des maths, Problème d'avril 2012]

Soit I le point d'intersection des trois bissectrices intérieures d'un triangle. Démontrez que toute droite passant par I divise le périmètre du triangle en deux parties égales si et seulement si cette droite divise l'aire du triangle en deux parties égales.

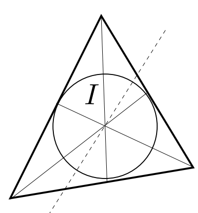
Solution *Si les trois sommets du triangle sont A, B et C, alors sans perte de généralité, on peut supposer que la droite traversant I croise les côtés AB et AC aux points respectifs E et F. Selon l'hypothèse, la fraction périmètre entre E et F, passant par A, est égale à l'autre partie, donc*

$$AE + AF = EB + BC + CF\,.$$

Soit R le rayon de l'unique cercle inscrit traversant I. Ce cercle est tangent aux côtés du triangle, bien que les points de tangence ne soient pas les points milieux de chaque côté. Toutefois, le segment de chaque point de tangence au centre I est perpendiculaire au côté, donc le rayon R du cercle est aussi la hauteur des triangles AEI, EBI, BCI, CFI et FAI. Si l'on multiplie l'égalité des deux parts du périmètre par $R/2$, alors

$$\text{Aire}(AEI) + \text{Aire}(FAI) = \text{Aire}(EBI) + \text{Aire}(BCI) + \text{Aire}(CFI)\,.$$

Ceci complète la preuve.



3 Deux faces [4/2, USA Mathematical Talent Search 2000-2001]

Un polyèdre possède n sommets. Montrez qu'il existe au moins deux sommets qui sont voisins du même nombre d'arêtes.

Solution *Tout sommet doit être le lieu de rencontre d'au moins trois faces, donc trois arêtes. En revanche, tout sommet d'un polyèdre peut être lié à au plus $(n-1)$ sommets par $(n-1)$ arêtes, car il n'y a que n sommets. Donc, pour un sommet donné, si k est le nombre d'arêtes qui se touchent à ce sommet, alors*

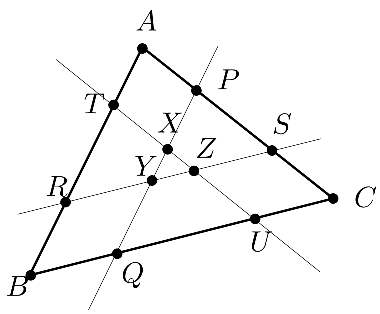
$$3 \leq k \leq n-1\,.$$

Le nombre k de voisins d'un sommet est donc l'un des $n-1-3+1 = n-3$ nombres entiers dans cet intervalle. Nous avons donc n sommets et chaque sommet est à l'intersection de k arêtes, mais k ne peut prendre que $n-3$ différentes valeurs. Nous devons donc avoir au moins deux sommets avec le même nombre d'arêtes voisins.
L'argument dans la conclusion est aussi connue sous le nom du principe des tiroirs.

4 Tel père, tel fils [5/2, USA Mathematical Talent Search 2000-2001]

Soit un triangle $\triangle ABC$ et des segments PQ, RS et TU parallèles à AB, BC et CA, respectivement. Supposons que ces trois segments, tels qu'illustrés dans la figure ci-contre, se rencontrent aux points X, Y et Z.

Si chaque segment PQ, RS et TU subdivise le triangle $\triangle ABC$ en deux parties d'aire égale, et si l'aire du triangle intérieur $\triangle XYZ$ est 1, alors quelle est l'aire du $\triangle ABC$.



Solution *On observe d'abord que*

$$\frac{\text{Aire}(\triangle TBU)}{\text{Aire}(\triangle ABC)} = \frac{BT}{BA} \cdot \frac{BU}{BC} = \frac{1}{2}$$

car l'aire d'un de ces triangles, disons $\triangle ABC$, est proportionnel au produit des longueurs de deux de ces côtés, c-à-d

$$\text{Aire}(\triangle ABC) = c \cdot AB \cdot BC,$$

où la constante c est essentiellement le sinus de l'angle entre les deux segments, mais ceci est sans importance. De plus, le facteur de proportionnalité est est le même pour $\triangle ABC$ et $\triangle TBU$, ce qui explique la première formule. Par symétrie, les deux rapports dans la formule originale sont égaux, donc

$$\frac{BT}{BA} = \frac{BU}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il s'en suit que

$$1 = \frac{BA}{BA} = \frac{BT + TA}{BA} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{TA}{BA} \Longrightarrow TA = BA\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

Il est aussi facile de voir, à l'aide du même raisonnement, que

$$BR = BA\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

Les triangles $\triangle BTU$ et $\triangle PQC$ sont semblables et sont de même aire, donc leurs côtés sont de la même longueur. En particulier on a $PQ = BT$. Des droites parallèles coupent deux droites parallèles, donc $AT = PX$ et $BR = YQ$.

À l'aide de toutes ces identités, on déduit que

$$PQ = QY + YX + XP \Longrightarrow \frac{BA}{\sqrt{2}} = XY + BA\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\,,$$

ou bien tout simplement

$$AB\Big(\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Big) = XY\,.$$

Le même raisonnement démontre que

$$AC\Big(\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Big) = XZ\,.$$

On peut maintenant conclure que

$$\frac{\text{Aire}(XYZ)}{\text{Aire}(ABC)} = \frac{XY}{AB}\cdot\frac{XZ}{AC} = \Big(\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Big)^2\,.$$

L'aire du triangle $\triangle XYZ$ étant 1, *on peut conclure que*

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{2}{(3-2\sqrt{2})^2}\,.$$

5 Couper la poire encore et encore [Inspiré de 4/21, International Mathematical Talent Search 1995]

Le processus mathématique infini illustré ci-dessous est bien défini et représente un nombre réel. Quel est ce nombre ?

$$1+\cfrac{2+\cfrac{1+\cfrac{2+\cfrac{1+\cdots}{3+\cdots}}{3+\cfrac{1+\cdots}{2+\cdots}}}{3+\cfrac{1+\cfrac{2+\cdots}{3+\cdots}}{2+\cfrac{1+\cdots}{3+\cdots}}}}{3+\cfrac{1+\cfrac{2+\cfrac{1+\cdots}{3+\ldots}}{3+\cfrac{1+\cdots}{2+\cdots}}}{2+\cfrac{1+\cfrac{2+\cdots}{3+\cdots}}{3+\cfrac{1+\cdots}{2+\cdots}}}}$$

Solution *Soit x le nombre réel construit par ce processus. Soit y, le nombre construit par le processus au numérateur,*

$$2+\cfrac{1+\cfrac{2+\cfrac{1+\cdots}{3+\cdots}}{3+\cfrac{1+\cdots}{2+\cdots}}}{3+\cfrac{1+\cfrac{2+\cdots}{3+\cdots}}{2+\cfrac{1+\cdots}{3+\cdots}}}$$

et z le nombre construit par le processus au dénominateur,

$$3+\cfrac{1+\cfrac{2+\cfrac{1+\cdots}{3+\cdots}}{3+\cfrac{1+\cdots}{2+\cdots}}}{2+\cfrac{1+\cfrac{2+\cdots}{3+\cdots}}{3+\cfrac{1+\cdots}{2+\cdots}}}.$$

On observe alors que l'équation originale peut s'écrire

$$x = 1 + \frac{y}{z} \quad \Longleftrightarrow \quad zx = z + y\,.$$

En somme, si y et z existent, alors x aussi, ce qui n'améliore guère les choses. Toutefois la définition de y entraine que

$$y = 2 + \frac{x}{z} \quad \Longleftrightarrow \quad zy = 2z + x\,,$$

et que finalement

$$z = 3 + \frac{x}{y} \quad \Longleftrightarrow \quad yz = 3y + x\,.$$

En particulier, si x et z existent, alors y existe et de même, si x et y existent, alors z existe. Il s'en suit que le calcul de ces quantités peut se faire sous l'hypothèse de leur existence.

Si l'on soustrait la troisième équation de la deuxième, l'on obtient

$$0 = 2z - 3y \qquad \Longrightarrow \qquad z = \frac{3}{2}y\,.$$

Si l'on substitue cette identité dans la première équation, l'on déduit

$$x \cdot \frac{3}{2} \cdot y = \frac{3}{2}y + y \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{5}{3}.$$

Ceci complète la solution, mais quelques calculs additionnels permettent de montrer que

$$y = 1 + \sqrt{1 + \frac{10}{9}}\,, \quad \text{et} \quad z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}\,.$$

On observe aussi qu'un calcul explicite du processus aurait permis de deviner la réponse car

$$1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

suivi de

$$1+\frac{2+\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

et de même

$$1+\frac{2+\frac{1+\frac{2}{3}}{3+\frac{1}{2}}}{3+\frac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{1}{3}}}=1+\frac{2+\frac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{2}}}{3+\frac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{3}}}=1+\frac{2+\frac{10}{21}}{3+\frac{5}{7}}=1+\frac{\frac{52}{21}}{\frac{26}{7}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\,.$$

Cette approche plus directe aurait probablement pu servir de base pour une preuve.

6 Une moyenne géométrique parfaite [2/29, International Mathematical Talent Search 1998]

Trouvez le plus petit rationnel $\frac{r}{s}$ tel que pour tous les entiers positifs k, m et n satisfaisant

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1\,,$$

alors

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leq\frac{r}{s}\,.$$

Solution *Le premier cas limite explicite bien la problématique. Supposons que $k \leq m \leq n$. La plus petite valeur possible pour k est 2, alors les seuls choix possibles sont $m = n = 4$ et ainsi*

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1\,.$$

Malheureusement, la somme de ces fractions doit être strictement inférieur à 1. On voit donc que l'objectif sera de construire les sommes les plus élevées possibles, mais inférieur à 1, donc de choisir les entiers k, m et n les plus petits possibles.

Supposons d'abord que $k = 2$. Alors

– *si $m = 3$, le plus petit entier n possible est $n = 7$ et*

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}\,;$$

– *si $m = 4$, le plus petit entier n possible est $n = 5$ et*

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}\,;$$

– *si* $m = 5$, *le plus petit entier* n *possible est* $n = 5$ *et*

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{9}{10}\,;$$

– *si* $m \geq 6$, *alors toutes les sommes sont plus petites que les trois sommes précédentes.*
Supposons maintenant que si $k = 3$. *Alors*
– *si* $m = 3$, *le plus petit entier* n *possible est* $n = 4$ *et*

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}\,;$$

– *si* $m = 4$, *le plus petit entier* n *possible est* $n = 4$ *et*

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{12}\,;$$

– *si* $m = 5$, *le plus petit entier* n *possible est* $n = 5$ *et*

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{15}\,;$$

– *si* $m \geq 6$, *alors toutes les sommes sont plus petites que les trois sommes précédentes.*
Finalement, supposons que $k = 4$. *Alors*
– *si* $m = 4$, *le plus petit entier* n *possible est* $n = 4$ *et*

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{12}\,;$$

– *si* $m = 5$, *alors toutes les sommes sont plus petites que la trois somme précédente.*
Clairement, il n'est pas nécessaire de vérifier les cas avec $k \geq 5$.
En conclusion, le nombre rationnel le plus petit est le minimum des sommes obtenues, donc

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \min\left\{\frac{41}{42}, \frac{19}{20}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \frac{11}{15}, \frac{3}{12}\right\} \leq \frac{41}{42}\,.$$