Association mathématique du Québec

Concours 2015, ordre secondaire

Le mercredi 18 février 2015, en matinée

Le Concours de l'Association mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. Les calculatrices sont permises mais ne sont pas nécessaires.

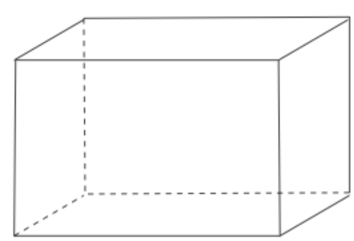
La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

1 Où sont passés mes champignons ?

En préparation à sa fameuse recette de Boeuf Stroganov, un chef achète un kilogramme de champignons frais dont 99% de la masse est formée d'eau. Au bout de quelque temps, une partie de l'eau s'est évaporée, si bien que l'eau dans les champignons ne forme plus que 98% de la masse. Quelle est alors la masse des champignons ?

2 Conseils de peintres

Un parallélépipède rectangle a des côtés de longueurs entières choisies de sorte que la somme du nombre de ses sommets, de la longueur de ses arêtes, de l'aire de ses faces et de son volume soit 2015. Quel est le volume du parallélépipède ?



3 Je suis le frère de mon frère

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 4$. Trouvez toutes les valeurs réelles x satisfaisant l'équation

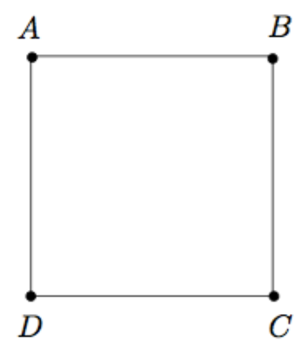
$$f\big(f(x)\big) = x.$$

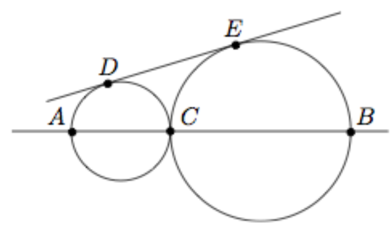
4 Le chaos dans l'avion

Soit un avion avec 50 sièges, tous en classe économie et tous de qualité identique. À l'embarquement, tous les sièges ont été attribués et les 50 passagers embarquent un par un dans l'avion. Le premier passager a oublié le numéro de son siège et s'assoit au hasard dans l'un des sièges. Tous les autres passagers connaissent leur numéro de siège et se rendent à leur siège l'un après l'autre. Si au moment de s'asseoir à son siège un passager remarque que celui-ci est occupé, le passager qui occupe le siège en choisira au hasard un nouveau parmi ceux qui sont inoccupés. Le passager déplacé sera rassis avant que le prochain passager embarque. Quelle est la probabilité que le siège attitré au dernier passager soit libre au moment de son embarquement ?

5 Aux quatre coins

Soit un carré de sommets A, B, C et D dont les diagonales sont AC et BD. Soit un point P pour lequel on a mesuré les distances $PA = 1$, $PB = 2$ et $PC = 3$. À partir de ces mesures, déduisez la longueur PD.





6 Les cercles cousins

Soit un segment de droite et un point C sur ce segment. Soit deux autres points A et B sur le segment de part et d'autre de C. Soit les deux cercles dont les diamètres sont AC et CB et dont les centres doivent bien sûr aussi être sur le segment initial. Soit DE une tangente commune aux deux cercles qui les rencontre respectivement en D et en E. Montrez qu'il existe un unique cercle traversant les points A, D, E et B.

Solutions

1. Selon les hypothèses du problème, le kilo de champignons est initialement composé de 990 g d'eau et de 10 g de matière solide. Soit m la nouvelle masse des champignons après l'évaporation de l'eau. On trouve après évaporation que

$$0,98 = \frac{m-10}{m}.$$

Ce n'est alors qu'un exercice d'algèbre d'isoler la quantité $m = 500$ et de conclure que la masse totale des champignons après l'évaporation sera 500 grammes.

2. Soit M, N et K, les trois longueurs respectives des côtés distincts du parallélépipède rectangle. Alors, l'énoncé du problème nous dit que

$$\begin{aligned} 2015 &= 8 + 4(M+N+K) + 2(MN+NK+MK) + MNK \\ &= (M+2)(N+2)(K+2). \end{aligned}$$

La quantité 2015 est donc le produit de 3 entiers et la factorisation de 2015 est $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. On en déduit que $M = 3$, $N = 11$ et $K = 29$ et que le volume est 957.

3. On propose deux solutions.

Solution # 1 de la question 3. Résoudre $f(f(x)) = x$ revient à trouver les solutions x du système

$$\begin{aligned} y &= f(x) = x^2 - 4\,, \\ x &= f(y) = y^2 - 4\,. \end{aligned}$$

Si on soustrait ces deux équations, on trouve $y - x = -(y^2 - x^2)$, d'où $(y-x)(y+x+1) = 0$.
On a alors deux cas possibles : $y = x$ ou $y = -x-1$.
Si $y = x$, on a $y = x = x^2 - 4$, ce qui donne $x^2 - x - 4 = 0$ et $x = (1 \pm \sqrt{17})/2$.
Si $y = -x-1$, on a $y = -x-1 = x^2-4$, ce qui conduit à $x^2+x-3 = 0$ puis à $x = (-1 \pm \sqrt{13})/2$.

Solution # 2 de la question 3. Si x est une racine de $x = f(x) = x^2 - 4$, alors c'est aussi une solution de $f(f(x)) - x = 0$. Donc le polynôme $f(x) - x$ est un facteur de $f(f(x)) - x$. Plus explicitement $x^2 - x - 4$ est facteur de $((x^2-4)^2 - 4) - x = x^4 - 8x^2 - x + 12$. On trouve un autre facteur quadratique par division, ce qui donne $f(f(x)) - x = x^4 - 8x^2 - x + 12 = (x^2 - x - 4)(x^2 + x - 3)$. Il est alors facile de trouver les zéros de ce dernier polynôme.

4. Ce problème possède plusieurs solutions différentes tout dépendent de la manière que l'on analyse la sélection intermédiaires des sièges par le premier passager durant l'embarquement des passagers 2 à 49.

Solution # 1 de la question 4. On observe d'abord que la seule personne qui peut se tromper de siège est le premier passager. Quand ça arrive, c'est donc c'est le seul qui aura à choisir son prochain siège. De plus, quoi qu'il arrive, une fois les 49 premiers passagers auront embarqués, les passagers 2 à 49 occuperont leur propre siège. Le premier passager occupera soit son siège, ou le siège du passager 50. La séquence précise d'événements qui aura précédé l'embarquement du dernier passager aura été une suite d'expériences aléatoires par le premier passager avec trois possibilités :

– il choisit son siège,
– il choisit le siège du dernier passager,
– il choisit un des autres sièges libre et donc, il se fera éventuellement déplacer.

Les deux premières possibilités aura toujours une probabilité égale, et la troisième option ne fera que mener à une autre décision aléatoire et semblable par le premier passager. En conclusion, à chaque étape, le premier et le dernier siège auront une probabilité égale d'être choisit, et donc d'être occupé au moment de l'embarquement par le dernier passager. La probabilité que le dernier siège soit occupé, plutôt que le premier siège, est donc égale. La réponse est $0,5$.

Solution # 2 de la question 4. (plus sophistiquée) Pour simplifier la description de la solution, supposons qu'au i-ème passager ait été attribué le i-ème siège. Soit $P(n)$, la probabilité que le dernier passager sur un avion de n sièges retrouve son siège libre au moment de son embarquement. On observe d'abord que si $n = 2$, alors $P(2) = 0,5$.
Considérons maintenant le cas général d'un avion avec n sièges. Quand le premier passager monte à bord, soit (i), avec probabilité $1/n$ il occupera son propre siège et donc le dernier passager occupera son siège, soit (ii), avec probabilité $1/n$ il occupera le siège du dernier passager et celui-ci le retrouvera occupé à l'embarquement, soit (iii), avec probabilité $1/n$ l'un des autres sièges sera occupé. Si dans le troisième cas le i-ème siège est sélectionné par le premier passager, avec $2 \leq i \leq n-1$, alors les prochains $i-2$ passagers pourront s'asseoir à leur siège attitré. Ensuite, quand le i-ème passager déplacera le premier passager du i-ème siège, le problème se répétera mais dans un avion avec seulement $n-(i-1) = n+1-i$ sièges libres. Formellement, quand $n \geq 2$ on a que

$$\begin{aligned}
P(n) &= \text{Prob}\{ \text{ passager \# 1 occupe siège \# 1}\} \\
&\quad + \text{Prob}\{ \text{ passager \# 1 occupe siège \# 2}\} \times P(n-1) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \text{Prob}\{ \text{ passager \# 1 occupe siège \# } n-1\} \times P(2) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}P(n-1) + \frac{1}{n}P(n-2) + \cdots + \frac{1}{n}P(2)\,.
\end{aligned}$$

En multipliant par $(n-1)/n$ la même identité pour $P(n-1)$ (qui est trivialement vrai quand $n-1=2$ car la somme est nulle) on déduit

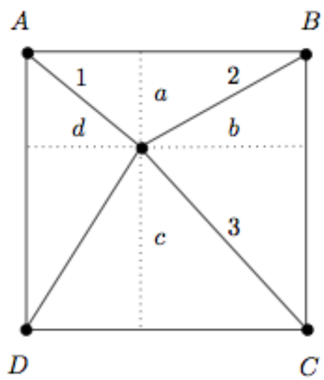
$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n}P(n-1) &= \frac{n-1}{n}\Big(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}P(n-2) + \cdots + \frac{1}{n-1}P(2)\Big) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}P(n-2) + \cdots + \frac{1}{n}P(2) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n}P(n-1) + \frac{1}{n}P(n-1) + \frac{1}{n}P(n-2) + \cdots + \frac{1}{n}P(2) \\
&= -\frac{1}{n}P(n-1) + P(n)\,.
\end{aligned}$$

L'on isole $P(n-1)$ et l'on découvre que $P(n) = P(n-1)$. Par récurrence, on conclut que $P(n) = P(2) = 0,5$.

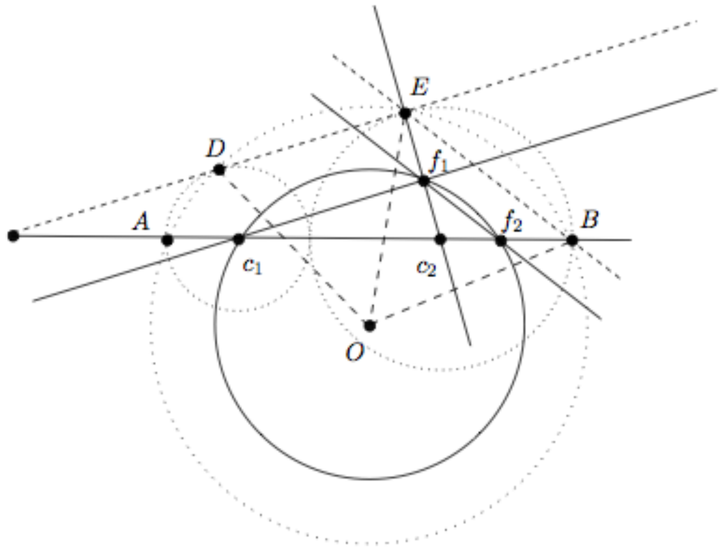
5. Soit a, b, c, d les distances respectives de P aux droites AB, BC, CD et DA. On cherche PD. Or

$$\begin{aligned} PD^2 &= c^2 + d^2 \\ &= (a^2 + d^2) - (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) \\ &= PA^2 - PB^2 + PC^2 \\ &= 1 - 4 + 9 = 6\,. \end{aligned}$$

Donc $PD = \sqrt{6}$.



6. **Solution # 1 de la question 6.** Soit r le rayon du plus petit cercle (disons celui de diamètre AC) et R celui du plus grand ; C_1 le centre du petit cercle et C_2 celui du grand. De C_1, tracez une parallèle à DE coupant EC_2 en F_1. Tracer ensuite une parallèle à BE passant par F_1 et coupant AB en F_2. Soit O le centre du cercle passant par C_1, F_1 et F_2.
Le triangle OC_1F_1 est isocèle et les droites DC_1, EF_1 sont perpendiculaires aux droites parallèles DE et C_1F_1, donc le triangle ODE est aussi isocèle. La même observation appliquée au triangle isocèle OF_1F_2 implique que OEB est isocèle. En conséquence, on voit que $OD = OE = OB$.
On montre que les 2 triangles AC_1O et BF_2O sont égaux. On a l'égalité $OC_1 = OF_2$. De plus, $AC_1 = C_1D = EF_1$ et le segment EF_1 est symétrique à BF_2 dans le triangle isocèle C_2EB. Ainsi, $r = AC_1 = BF_2$. De plus $\angle AC_1O = \angle OF_2B$ comme supplémentaires des angles égaux du triangle isocèle OC_1F_2. Ainsi $OA = OB = OD = OE$.



Solution # 2 de la question 6. Soit C_1 (resp. C_2) le centre du cercle ADC (resp. CEB). Soit D' symétrique de D par rapport à C_1 et E' symétrique de E par rapport à C_2.
Le quadrilatère $ADCD'$ est un rectangle car AC et DD' sont des diamètres du cercle ADC. De même, le quadrilatère $CEBE'$ est une rectangle.
Soit F le milieu de DE. On a que $DF = CF$ (comme tangentes au cercle issues d'un même point). De même $CF = FE$. Donc les points D, C et E sont sur un même cercle centré en F. Donc $\angle DCE$ est droit, puisque DE en est un diamètre. On en déduit que D, C et E' sont alignés, de même pour E, C et D'.
Soit maintenant O le milieu de $D'E'$. On voit que $FO||DD'||EE'$ (car FO joint les milieux de deux côtés opposés du trapèze $DEE'D'$, les deux autres côtés DD' et EE' étant parallèles). Donc FO coupe DE perpendiculairement en son milieu. Comme les triangles DFO et EFO sont égaux, on conclut que $OD = OE$.
Considérons maintenant la droite joignant le milieu de AD à O. Un raisonnement similaire appliqué au trapèze à deux côtés parallèles $ADE'D'$ montre que cette droite est perpendiculaire à AD (et passe par C_1). On a donc $OA = OD$. De la même façon, $OE = OB$.