Concours de l'AMQ 2014, ordre secondaire

Solutionnaire

Le Concours de l'Association mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. **Les calculatrices sont interdites.**

La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

---

1. Réparez cette imprimante !

Un libraire achète 360 exemplaires d'un manuel. La facture est mal imprimée car elle indique un coût total de

$$*5555, ** \ \$,$$

les symboles $*$ représentant des chiffres illisibles. Quel est le coût de chaque manuel, sachant qu'il ne dépasse certainement pas 150 $?

Solution :

Soit $C = a5\,555, bc$ le coût total, où a, b, c sont des chiffres. Comme $360 = 5 \cdot 8 \cdot 9$, on sait que C est divisible par 10 (donc $c = 0$), par 8 (donc $b = 2$ ou $b = 6$) et par 9 (donc $a + b + 2$ est multiple de 9. Ceci conduit à deux solutions :

1. $a = 5, b = 2, c = 0$ d'où $C = 55\,555, 20$ pour un coût unitaire de $154, 32\,\$$ ou
2. $a = 1, b = 6, c = 0$ d'où $C = 15\,555, 60$ pour un coût unitaire de $43, 21\,\$$.

Seule la deuxième donne un coût unitaire de moins de 150 $.

2. Chevaliers de la table ronde

Ce jour-là, le roi Arthur décide d'envoyer des chevaliers à la recherche du Graal. Ceux-ci doivent être tout équipés, c'est à dire : avoir une épée, une armure, un bouclier et un cheval. Or, 95 % des chevaliers ont leur épée, 90 % ont leur cheval, 80 % leur bouclier et 70 % leur armure. Trouvez la proportion minimale et la proportion maximale de chevaliers tout équipés.

Solution :

Clairement, au mieux 70 % des chevaliers sont tout équipés (si tous ceux à qui il manque au moins une pièce d'équipement n'ont pas d'armure). D'autre part, 5% n'ont pas leur épée, 10% n'ont pas leur cheval, 20% pas leur bouclier et 30% pas leur armure. Au pire, ces quatre groupes de chevaliers ne se recoupent pas. Dans ce cas, on aura un total de 65% de chevaliers qui ont oublié au moins une pièce d'équipement ; la proportion de chevaliers tout équipés est alors de 35%.

3. À la brasserie

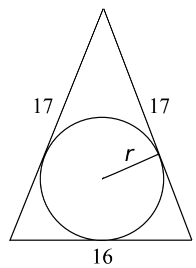
Tournoi revanche au bras-de-fer entre Hercule Lamontagne et Maxime Lacasse ! Le tournoi comporte autant de rondes que nécessaire, le gagnant étant le premier à remporter 2 rondes de plus que son adversaire. (Chaque ronde se termine par une victoire d'un des deux participants.) Les deux joueurs sont à peu près de force égale car Hercule n'a fini par gagner qu'au bout de 18 rondes. De combien de façons a pu se dérouler le tournoi ?

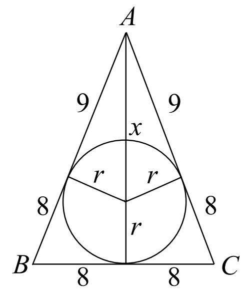
Solution :

En enregistrant les initiales du gagnant de chaque ronde, on voit que pour les deux premières rondes, les gagnants doivent être soit HM ou soit MH (deux choix), sinon quelqu'un aurait déjà gagné le tournoi. À ce moment, chacun a gagné autant de rondes que son adversaire et on se retrouve comme au départ. Le même raisonnement s'applique donc aux 3^e et 4^e rondes (deux choix), puis aux 5^e et 6^e (deux choix) et ainsi de suite jusqu'au 15^e et 16^e (deux choix), les deux dernières étant des gains pour Hercule. On a donc 8 fois deux choix soit $2^8 = 256$ déroulements possibles.

4. L'éternel triangle

Dans le triangle de côtés 16, 17, 17, quel est le rayon du cercle inscrit ?





Solution :

Soit ABC le triangle, avec $AB = AC = 17$. Soit r le rayon du cercle inscrit et x la distance de son centre au sommet A. Les tangentes issues de B et de C ont clairement 8 unités de longueur (la moitié de la base BC). Il reste donc 9 unités pour les tangentes issues de A, comme indiqué sur la figure ci-contre.

Aux points de tangence, les rayons et les tangentes correspondantes forment des angles droits. On a donc :

$$x^2 = r^2 + 9^2 \quad \text{et} \quad (x+r)^2 + 8^2 = 17^2 \, .$$

La seconde équation donne successivement

$$\begin{aligned} (x+r)^2 + 8^2 &= 17^2 \\ (x+r)^2 &= 17^2 - 8^2 = 9 \cdot 25 \\ x + r &= \pm 3 \cdot 5 \, . \end{aligned}$$

Dans ce contexte, seule la racine positive a du sens. Ainsi, $x = 15 - r$, ce qui, reporté dans la première équation, conduit à

$$(15 - r)^2 = r^2 + 9^2 \, .$$

Après développement et simplification, on isole le rayon r pour trouver
$r = (15^2 - 9^2)/30 = 6 \cdot 24/30 = 24/5$.

5. Les racines, carrées

Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-5} = \sqrt{x}\,.$$

Solution :
On élève l'équation au carré, on simplifie et on isole la racine restante :

$$x - 2 = 2\sqrt{(x+3)(x-5)}\,.$$

On élève de nouveau au carré et on re-simplifie :

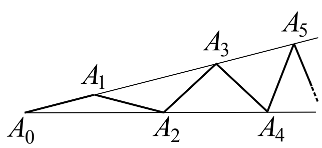
$$3x^2 - 4x - 64 = 0\,.$$

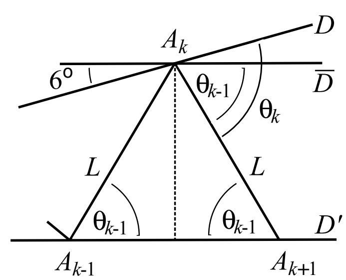
Les deux racines de cette dernière équation sont $x = -4$ et $x = 16/3$. Seule $x = 16/3$ vérifie l'équation de départ.

6. Zig-zag

Deux droites se coupent en un point A_0 et sont séparées d'un angle de $6°$. On prend des points $A_2, A_4, A_6, \ldots$ sur l'une des droites et $A_1, A_3, A_5, \ldots$ sur l'autre, de sorte que les segments $A_0\,A_1$, $A_1\,A_2$, $A_2\,A_3$, $A_3\,A_4, \ldots$ aient tous la même longueur. Quel est le nombre maximal de segments distincts qu'on peut placer ainsi ?
Solution :

On notera D et D' les deux droites, L la longueur commune des segments A_kA_{k+1} et θ_k l'angle que fait le segment A_kA_{k+1} avec celle des deux droites D et D' ne passant pas par A_{k+1}.





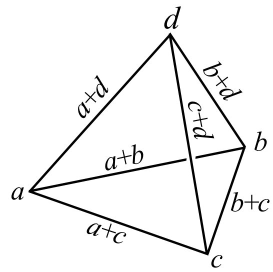
Pour commencer, trouvons le lien entre les angles θ_{k-1} et θ_k. Pour ce faire, traçons la droite $\overline{D}$ passant par A_k et parallèle à la droite $A_{k-1}A_{k+1}$ (disons D'). L'angle entre D et $\overline{D}$ est le même qu'entre D et D', soit $6°$. De plus, le triangle $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ est isocèle. Donc l'angle entre $\overline{D}$ et le segment A_kA_{k+1} est θ_{k-1}. Ceci conduit à $\theta_k = \theta_{k-1} + 6°$.
On trouve donc $\theta_0 = 6°, \theta_1 = 12°, \theta_2 = 18°, \ldots$ D'où

$$\theta_k = (k+1)\cdot 6°\,.$$

Finalement, examinons en quelles circonstances la procédure ne produit plus de nouveaux segments. Supposons que l'on ait construit les points $A_0, A_1, \ldots, A_k$. Si l'angle θ_{k-1} est aigu, on pourra placer le point A_{k+1} : en effet, le nouveau segment A_kA_{k+1} est simplement la réflexion du segment précédent ($A_{k-1}A_k$) par rapport à une perpendiculaire à $A_{k-1}A_{k+1}$ ($= D'$) issue de A_k. La procédure s'arrête donc dès que $\theta_{k-1} = k \cdot 6° = 90°$, c'est-à-dire dès que $k = 15$. On aura alors placé les points $A_0, A_1, \ldots, A_{15}$ qui définissent 15 segments.

7. Pas plus d'un dissident

Sur les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre, on place des nombres réels a, b, c, d (respectivement). Sur chacune des arêtes, on place la somme des nombres associés à ses deux extrémités (ce sera le poids de l'arête). Les nombres sont choisis pour que le produit des poids de deux arêtes opposées (i.e. n'ayant aucune extrémité en commun) soit toujours le même. Montrez qu'au moins trois des nombres a, b, c, d sont égaux.



Solution :
L'égalité des produits s'écrit

$$(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d) = (a + d)(b + c)\,.$$

La première égalité $(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d)$ conduit, après simplification et factorisation, à

$$(a - d)(b - c) = 0\,. \tag{0.1}$$

De même, la seconde égalité mène à

$$(a - b)(c - d) = 0\,. \tag{0.2}$$

Supposons que les nombres a, b, c, d ne soient pas tous égaux. Il y a alors au moins deux nombres différents. Grâce à la symétrie de la situation, on peut supposer qu'il s'agit de d et a (i.e. $d \neq a$). Dans ce cas, l'équation (0.1) donne $b = c$ et l'équation (0.2) donne $a = b = c$ ou $b = c = d$.