Nom : Résultat : %

Solutionnaire du Concours secondaire 2013

Association mathématique du Québec (AMQ)

7 février 2013

Question 1: Le temps qui passe 20 %

Cette question concerne un rameur dans un canoë sur une rivière. La vitesse du courant de la rivière est constante et on l'évalue à 10 km/h. Le vitesse du canoë en eau calme est aussi constante. Toutefois, en présence de courant, cette dernière est influencée selon que le rameur avance à contre-courant (ce qui le ralenti) ou avec le courant (ce qui l'accélère).

Les questions (1) et (2) ci-dessous sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Il faut au rameur une heure de plus pour parcourir 2,2 km en remontant le courant que pour parcourir la même distance en le descendant. Quelle est la vitesse du canoë en eau calme ?

   La vitesse est la distance divisée par le temps. Le temps est donc égal à la distance divisée par la vitesse. Soit x la vitesse du canoë en eau calme (en km/h).

$$\frac{2,2}{x-10} = \frac{2,2}{x+10} + 1$$
$$\Longrightarrow \frac{2,2(x+10)}{(x-10)(x+10)} = \frac{2,2(x-10)}{(x-10)(x+10)} + \frac{(x-10)(x+10)}{(x-10)(x+10)}$$
$$\Longrightarrow 2,2x + 22 = 2,2x - 22 + x^2 - 100$$
$$\Longrightarrow x^2 = 144$$
$$\Longrightarrow x = 12$$

   La vitesse du canoë en eau calme est de 12 km/h.

2. Il faut au rameur deux fois plus de temps pour parcourir 2,2 km en remontrant le courant que pour parcourir la même distance en le descendant. Quelle est la vitesse du canoë en eau calme ?

$$\frac{2,2}{x-10} = 2 * \frac{2,2}{x+10}$$
$$\Longrightarrow 2,2(x+10) = 4,4(x-10)$$
$$\Longrightarrow 2,2x + 22 = 4,4x - 44$$
$$\Longrightarrow 2,2x = 66$$
$$\Longrightarrow x = 30$$

   La vitesse du canoë en eau calme est de 30 km / h.

Question 2: L'ainé des nôtres 10 %

Définition de *Algorithme* : Ensemble de règles opératoires propres à un calcul.

Voici, sous sa forme la plus simple, un algorithme proposé par Euclide :

1. On prend deux nombres entiers non-nuls a et b avec $a > b$.
2. On soustrait le plus petit nombre du plus grand. On obtient le nombre c.
3. Si $c = b$, l'algorithme est terminé et son résultat est c . Sinon, on renomme les nombres b et c de la façon suivante : le plus grand des deux devient a et le plus petit des deux devient b. On retourne ensuite à la première étape de l'algorithme (autant de fois que nécessaire ; l'algorithme finira par finir !).

Que donne le résultat de cet algorithme lorsque $a = 323$ et $b = 119$ et quel nom donne-t-on, en général, à ce résultat ?

Soit $a = 323$ et $b = 119$. Alors $c = 323 - 119 = 204$. On recommence avec $a = 204$ et $b = 119$. Alors $c = 204 - 119 = 85$. On recommence avec $a = 119$ et $b = 85$. Alors $c = 119 - 85 = 34$. On recommence avec $a = 85$ et $b = 34$. Alors $c = 85 - 34 = 51$. On recommence avec $a = 51$ et $b = 34$. Alors $c = 51 - 34 = 17$. On recommence avec $a = 34$ et $b = 17$. Alors $c = 34 - 17 = 17$. Puisque $c = b$ l'algorithme se termine et son résultat est 17.

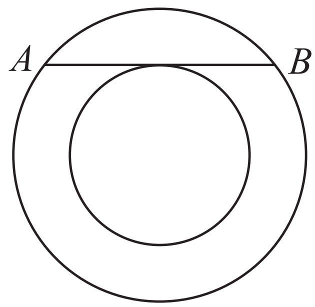
C'est le plus grand commun diviseur des deux nombres initiaux. Donc 17 est le PGCD de 323 et 119.

Cet algorithme permet de déterminer le PGCD de deux nombres entiers positifs.

Question 3: Il y a une différence entre nous mon cher Pythagore 10 %

Définition de *Concentrique* : Qui a un même centre.

La tangente à un cercle coupe un deuxième cercle, concentrique au premier, en A et B. La longueur du segment AB est égale à 10 cm. Quelle est l'aire de l'anneau (région comprise entre les deux cercles) ?



Soit R est un rayon du plus grand cercle allant du centre du cercle O jusqu'au point B.

Soit r est un rayon du plus petit cercle allant du centre du cercle O jusqu'à la rencontre du plus petit cercle et du segment de droite.

L'aire de l'anneau est la différence entre les aires des deux cercles. On cherche donc $\pi R^2 - \pi r^2$.

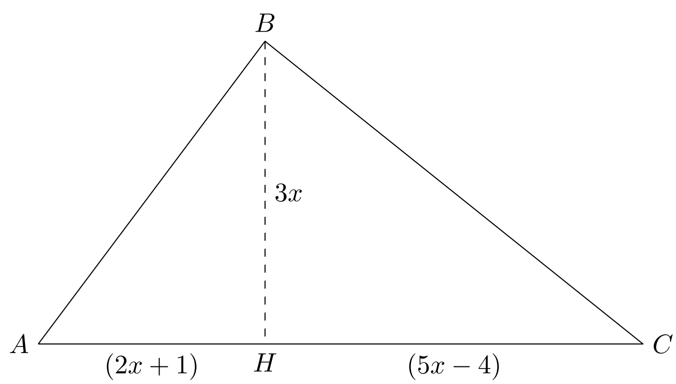
Selon Pythagore, on obtient l'égalité suivante : $R^2 = r^2 + 5^2$ (puisque 5 est la demie du segment de droite). On a donc que $R^2 - r^2 = 25$. Et l'aire cherchée est donc égale à 25π.

Question 4: Nous sommes tellement pareils toi et moi 20 %

Dans le triangle rectangle ci-dessous, $\overline{BH}$ est une hauteur. On connaît les faits suivants :

1. $m\,\overline{AH} = (2x+1)$ cm
2. $m\,\overline{HC} = (5x-4)$ cm
3. $m\,\overline{BH} = 3x$ cm

Déterminez la valeur numérique du périmètre du triangle ABC (en cm).



La hauteur $\overline{BH}$ coupe le triangle initial en deux triangles semblables. Les proportions des deux triangles sont donc équivalentes. On a donc l'égalité suivante :

$$\frac{3x}{2x+1} = \frac{5x-4}{3x}$$

$$\Longrightarrow 9x^2 = 10x^2 - 3x - 4 \Longrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$$

On trouve donc que $\overline{AH} = 9$ cm, $\overline{HC} = 16$ cm, $\overline{BH} = 12$ cm, ce qui permet d'utiliser la règle du triangle de Pythagore afin d'obtenir $\overline{AB} = 15$ cm et $\overline{BC} = 20$ cm, ce qui donne un périmètre de 60 cm.

Question 5: Nous sommes sûrement plus grands que moi 20 %

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, quelle est la valeur minimale de $C = x^4 + 5x^2 + 4 - 2xy + y^2$?

Comme toujours, vous devez justifier votre réponse.

On peut réécrire C de la façon suivante :

$$C = (x^4 + 4x^2 + 4) + (x^2 - 2xy + y^2) = (x^2 + 2)^2 + (x - y)^2 \geq (x^2 + 2)^2$$

On dit que $(x^2 + 2)^2$ est un minorant de C (C ne peut être inférieur au minorant). On note aussi que si $x = y$ alors $(x - y)^2 = 0$. Dans ce cas, C est égal au minorant. Il ne reste qu'à déterminer pour quelle valeur de x ce minorant est-il minimal. Bien sûr que $x = 0$ (et donc $y = 0$), ce qui donne une valeur minimale de $C = 4$.

Question 6: C'est bientôt terminé puisqu'ils s'en vont presque tous ! 20 %

Pour $n \in \{2, 3, \ldots, 2013\}$, on considère les nombres de forme $\big(1 - 1/n^2\big)$.

Simplifier leur produit revient donc à simplifier le produit suivant :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ \ldots \ \cdot \left(1 - \frac{1}{2012^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right)$$

Effectuez cette simplification.

On peut réécrire chaque terme de forme $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ de la façon suivante :

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(n^2 - 1)}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

On obtient donc le produit suivant :

$$\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2009 \cdot 2011}{2010^2} \cdot \frac{2010 \cdot 2012}{2011^2} \cdot \frac{2011 \cdot 2013}{2012^2} \cdot \frac{2012 \cdot 2014}{2013^2}$$

On voit que presque tous les nombres "disparaissent" sauf $\dfrac{2014}{2 \cdot 2013}$. La réponse est donc $\dfrac{2014}{4026}$.