Association mathématique du Québec

Concours 2012, ordre secondaire

Le 9 février 2012, de 9h00 à 12h00

Le Concours de l'Association Mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. **Les calculatrices sont interdites.**

La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

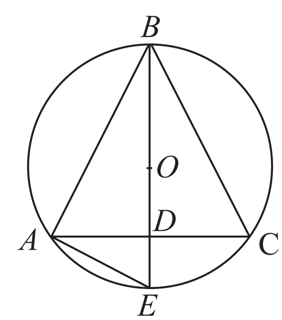
1 « Un » peu plus loin

Soit R un rectangle de dimensions $a \times b$. Quels sont l'aire et le périmètre de l'ensemble des points situés à distance 1 ou moins de R (incluant R) ?

Solution : L'ensemble est constitué du rectangle R, de 4 quarts de cercles de rayon 1 et de 4 petits rectangles tous de côté 1 et de bases respectives a, a, b et b. L'aire totale est donc $ab + 2a + 2b + \pi$ et le périmètre $2a + 2b + 2\pi$.

2 Semblables dans la différence

Quel est le rayon du cercle circonscrit à un triangle isocèle de base 8 et de hauteur 8 ?



Solution 1 : Soit O le centre du cercle. On prolonge BO qui coupe AC en D et le cercle en E. Comme $\angle ABD = \angle EAD$, les triangles ABD et EAD sont semblables. On a donc $\frac{|DE|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|BD|}$ qui donne $|DE| = 2$. Le diamètre est donc 10 et le rayon 5.

Solution 2 : Soit $A = (-4, 0)$, $B = (0, 8)$ et $C = (4, 0)$ les sommets du triangle, comme sur la figure. L'équation du cercle est de forme $x^2 + (y - k)^2 = r^2$ où il s'agit de déterminer r, le rayon de ce cercle. On a donc

$$4^2 + k^2 = r^2 \quad \text{et} \quad (8 - k)^2 = r^2 \,,$$

qu'on peut résoudre pour obtenir $r = 5$.

3 L'art de conjuguer

Simplifiez la somme

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2012}}\,.$$

Solution : Comme

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,,$$

la somme est télescopique et donne

$$\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\cdots+\left(\sqrt{2012}-\sqrt{2011}\right)=\sqrt{2012}\,.$$

4 Le trois fait le mois

Alice et Bob expérimentent le jeu suivant. On commence avec 30 jetons. À tour de rôle, chaque joueur ôte du jeu 1, 2, 4, 8 ou 16 jetons (une puissance de 2). Un joueur qui ne peut rien enlever perd la partie. Alice a le choix de commencer ou non. Le devrait-elle ? Quelle est sa stratégie ?

Solution : Elle doit laisser Bob commencer. Les positions perdantes sont celles où le nombre de jetons est un multiple de 3 (ceci inclue la position initiale : 30 et la position finale : 0 jeton). S'il commence, Bob reçoit donc une position perdante. Comme aucune puissance de 2 n'est divisible par 3, il ne peut produire qu'une position gagnante pour Alice. Il suffit alors qu'elle ôte 1 ou 2 jetons pour ramener la pile à un multiple de 3. Plus explicitement, chaque fois que Bob ôte 1, 4 ou 16 jetons, elle enlève 2 jetons ; sinon elle en ôte 1.

5 Un tournoi linéaire

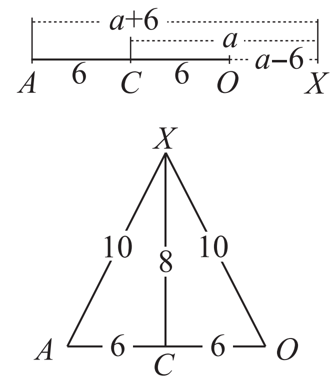
On organise un tournoi de bras-de-fer entre Maxime Lacasse et Hercule Lamontagne. Le tournoi comporte autant de rondes que nécessaire, le gagnant étant le premier qui parvient à gagner 2 rondes de plus que son adversaire. (Chaque ronde se termine par une victoire d'un des deux participants.) On estime que Hercule a 2/3 des chances de gagner une ronde en particulier. Quelle est la probabilité que Hercule gagne le tournoi ?

Solution : Soit P la probabilité qu'Hercule gagne le tournoi. Or celui-ci est constitué de :
– soit deux rondes, toutes deux gagnées par Hercule (probabilité $(2/3)^2 = 4/9$),
– soit commence par une victoire suivie d'une défaite. On reprend alors le tournoi comme si rien ne s'était passé (probabilité $(2/3)(1/3)\,P = (2/9)\,P$),
– soit commence par une défaite suivie d'une victoire. On reprend alors le tournoi comme si rien ne s'était passé (probabilité $(1/3)(2/3)\,P = (2/9)\,P$).
On a donc $P = 4/9 + (4/9)P$, ce qui conduit à $P = 4/5$.

6 Tu es mon étoile

Un dard est planté à 12 cm du centre d'une cible circulaire de 20 cm de rayon. On lance un autre dard, qui atteint la cible (chaque point de la cible a autant de chance qu'un autre d'être atteint). Quelle est la probabilité que le deuxième dard soit plus près du premier que du bord de la cible ?

Solution : Soit O le centre du cercle, A la position du premier dard et X un point situé à égale distance de A et du bord. On a donc $|AX| = 20 - |OX|$, i.e. $|AX| + |OX| = 20$. Il s'agit d'une ellipse de foyers O et A. Un des demi-axes (a) est donc sur la droite OA et l'autre (b) sur la perpendiculaire issue du milieu C de OA. On détermine alors les demi-axes en plaçant X successivement sur ceux-ci. Quand A, O et X sont alignés, on a $|AX| = a + 6$ et $|OX| = a - 6$. D'où $|AX| + |OX| = 2a = 20$ et $a = 10$ cm. D'autre part, en plaçant X pour que CX et OA soient perpendiculaires, on obtient $b = 8$ cm. La région favorable étant l'intérieur de l'ellipse, la probabilité cherchée sera le rapport de l'aire de l'ellipse sur l'aire de la cible, soit $(8 \cdot 10 \cdot \pi)/(20^2\,\pi) = 1/5$.



7 Le facteur sifflera deux fois

Soit $f(n) = \dfrac{2n^2+n-1}{2n^2-n-1}$. Simplifiez le produit

$$f(2)\,f(3)\,f(4)\,\cdots\,f(99)\,f(100)\,.$$

Solution : Comme $f(n) = \frac{2n^2+n-1}{2n^2-n-1} = \frac{(2n-1)(n+1)}{(2n+1)(n-1)}$, le produit est

$$\left(\frac{3\cdot 3}{5\cdot 1}\right)\left(\frac{5\cdot 4}{7\cdot 2}\right)\left(\frac{7\cdot 5}{9\cdot 3}\right)\left(\frac{9\cdot 6}{11\cdot 4}\right)\cdots\left(\frac{197\cdot 100}{199\cdot 98}\right)\left(\frac{199\cdot 101}{201\cdot 99}\right).$$

En réorganisant les facteurs, ceci devient

$$\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots 197\cdot 199}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdots 199\cdot 201}\right)\left(\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots 100\cdot 101}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 98\cdot 99}\right) = \left(\frac{3}{201}\right)\left(\frac{100\cdot 101}{1\cdot 2}\right) = \frac{5050}{67}\,.$$