Association mathématique du Québec

Concours 2011, ordre secondaire

Le 10 février 2011, de 9h00 à 12h00

Le Concours de l'Association Mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. **Les calculatrices sont interdites.**

La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

1 L'alphamétique palindromique

Otto aime tellement les palindromes (les nombres qui demeurent les mêmes lorsqu'on inverse l'ordre de leurs chiffres) qu'il a concocté l'alphamétique suivant :

$$\text{AMQMA} \times 6 = \text{LUCIE}\,.$$

Trouver les valeurs des huit chiffres.

(N. B. Un *alphamétique* est un petit casse-tête mathématique qui consiste en une équation où les chiffres sont remplacés par des lettres. Le résoudre consiste à trouver quelle lettre correspond à quel chiffre pour que l'équation soit vraie. Dans le problème, le même chiffre ne peut être représenté par deux lettres différentes et une lettre représente toujours le même chiffre. Bien entendu, un nombre ne doit jamais commencer par zéro. Par exemple, l'alphamétique

$$\text{PAPA} + \text{PAPA} = \text{MAMAN}$$

a pour solution P=7, A=5, M=1 et N=0. Ainsi, en remplaçant les lettres par les chiffres, on a bien 7575 + 7575 = 15150.)

Solution : A doit être 1, car sinon le produit aurait 6 chiffres. On a donc $\text{E} = 6$ et $\text{L} \geq 7$. Ensuite, on teste les valeurs de M. Ce dernier ne peut être pair car si $\text{M} = 2k$, on aurait

$$6\text{M} = 12k = 2k + 10k\,,$$

ce qui conduirait à $\text{I} = 2k = \text{M}$. De plus, $\text{M} \leq 5$ car si $\text{M} \geq 7$, le produit contiendrait 6 chiffres. Il ne reste que M=3 ou M=5. Si M=3, on a immédiatement I=8. On peut alors essayer les chiffres restants comme valeur de Q. Toutes conduisent à des duplications.
Il ne reste plus que M=5, donnant I=0. Ici encore, on essaie les différentes valeurs possibles de Q pour trouver la seule solution Q=4, C=7, U=2 et L=9, soit $15\,451 \times 6 = 92\,706$.

2 Anik et le train

Anik roule toujours à 108 km/h sur l'autoroute. En se rendant à un concours de mathématique, elle dépasse un train qui longe l'autoroute et qui se dirige dans le même sens qu'elle. Elle remarque qu'elle met exactement 77 secondes à le dépasser, i.e. franchir la distance qui sépare la queue du train et sa tête. Arrivée à destination, elle réalise qu'elle a oublié sa calculatrice, alors elle rebrousse chemin. Elle recroise alors le train, qui roule à la même vitesse, et cette fois, elle met exactement sept secondes à parcourir le train de la tête à la queue. Quelle est la longueur du train?

Solution : Soit L la longueur du train et V sa vitesse. Anik roule à 30 m/s. Comme à l'aller sa vitesse relative au train est de $3 - V$, on a $77\,(30 - V) = L$. Similairement, au retour on aura $7\,(30 + V) = L$. La solution de ces deux équations donne $L = 385\,\mathrm{m}$ (et $V = 25\,\mathrm{m/s}$).

3 Encore un feu rouge !

À un coin de rue, le feu de circulation reste vert pendant 30 secondes et rouge pendant 30 secondes (on suppose le temps du feu jaune inclus à même le temps du feu vert). Combien de temps perd-on, en moyenne, à attendre à ce coin de rue ? Justifier.

Solution : Si on arrive pendant que le feu est rouge, le temps d'attente moyen est de 15 s. alors que s'il est vert, on attendra 0 s. Les deux états étant de durée égale, on attendra en moyenne 15/2 s.

4 Les nombres sans sept

a. Combien y a-t-il de nombres entiers entre 0 et 999 (inclusivement) dont l'écriture décimale ne contient aucun 7 ?

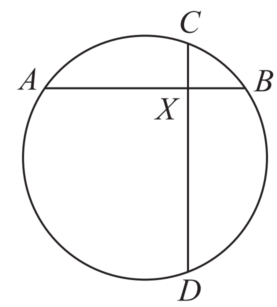
b. Quelle est la somme de ces nombres ?

Solution : a. Comme il y a 9 chiffres différents de 7, il y a $9 \times 9 \times 9 = 729$ nombres.
b . Chaque chiffre permis apparaît $9^2 = 81$ fois comme chiffre des unités d'un nombre. La somme des chiffres des unités est donc $81 \times (0 + 1 + 2 + \cdots + 6 + 8 + 9) = 3078$. Il apparaît aussi 81 fois comme chiffre des dizaines et comme chiffre des centaines, avec même somme des chiffres. La somme totale est donc $3\,078 + 30\,780 + 307\,800 = 341\,658$.

5 Cercle et cordes

Dans un cercle de rayon r, deux cordes AB et CD se coupent perpendiculairement en X. Montrer que

$$|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2 + |XD|^2 = 4\,r^2\,.$$



Solution : Soit $x^2 + y^2 = r^2$ l'équation du cercle. Soit $x = a$ et $y = b$ les équations des cordes, de sorte que $X = (a, b)$. On trouve facilement

$$A, B = (\pm\sqrt{r^2 - b^2}, b) \quad \text{et} \quad C, D = (a, \pm\sqrt{r^2 - a^2})\,.$$

La somme des carrés des segments donne :

$$\left(a + \sqrt{r^2 - b^2}\right)^2 + \left(-a + \sqrt{r^2 - b^2}\right)^2 + \left(b + \sqrt{r^2 - a^2}\right)^2 + \left(-b + \sqrt{r^2 - a^2}\right)^2$$

qui se simplifie aisément en $4\,r^2$.)

6 Les cubes déficients

$173^3 = 5\,177\,717$, $192^3 = 7\,077\,888$ et $1\,309^3 = 2\,242\,946\,629$ sont trois exemples d'entiers N dont le cube compte le même nombre de chiffres différents que N lui-même. Mais existe-t-il des entiers qui contiennent plus de chiffres différents que leur cube ? Oui : le nombre 13 798 compte cinq chiffres différents tandis que son cube, 262 692 525 592, n'en compte que quatre $(2, 5, 6$ et $9)$. On dira d'un tel nombre (quand il contient plus de chiffres différents que son cube) qu'il est déficient. Montrer qu'il y a une infinité d'entiers déficients.

Solution : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre 192×10^n contient 4 chiffres différents alors que son cube $(192 \times 10^n)^3 = 7\,077\,888 \times 10^{3n}$ n'en contient que trois.

7 Les équations tordues

Sachant que le système d'équations

$$x = \sqrt{11 - 2\,yz}, \quad y = \sqrt{12 - 2\,xz} \quad \text{et} \quad z = \sqrt{13 - 2\,xy}$$

possède des solutions réelles, que vaut $x + y + z$?

Solution : En élevant au carré chacune des équations, on obtient :

$$x^2 + 2\,yz = 11, \quad y^2 + 2\,xz = 12, \quad z^2 + 2\,xy = 13\,.$$

La somme de ces équations donne : $(x+y+z)^2 = 36$, d'où $x+y+z = \pm 6$. Comme $x, y, z \geq 0$, on a nécessairement $x+y+z = 6$.