Association Mathématique du Québec

Solutionnaire du concours secondaire AMQ 2010

Question 1

Réponse : $NOMBRE = 934065$

Cette réponse peut être obtenue par tâtonnements avec l'aide de quelques raisonnements.
Par exemple, nous avons que $NOMBRE \times 3 = ERBMON \times 5$.
Alors, $ERBMON \times 5$ se termine par un 0 ou un 5.
S'il se termine par un zéro, cela signifie que $E \times 3$ se termine aussi par un 0, et donc E=0, ce qui n'est pas possible, car $ERBMON$ ne doit pas commencer par 0.
Donc, $ERBMON \times 5$ se termine par un 5, et donc E=5, seule possibilité pour que $NOMBRE \times 3$ se termine par un 5. Etc.

Question 2

Le polynôme $p(x)$ se factorise en $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ où a,b,c sont ses zéros entiers. En développant, on obtient

$$p(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = x^3 + mx + 6$$

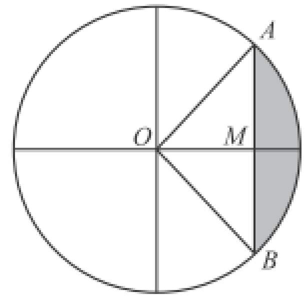
Ainsi $-abc = 6$ et $a+b+c = 0$. Donc a,b,c sont des diviseurs de -6. On trouve alors la seule possibilité : $a = 1, b = 2, c = -3$ (ou ses symétriques). On conclut que

$$m = ab + ac + bc = 2 - 3 - 6 = -7$$

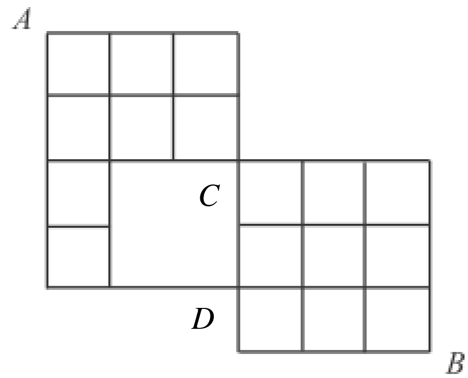
Le seul polynôme qui vérifie les conditions est $p(x) = x^3 - 7x + 6$

Question 3

Soit O, le centre du cercle et A, B les intersections de la droite avec le cercle. Soit M, le milieu du segment AB. Par le théorème de Pythagore, $MA = \frac{\sqrt{2}}{2} = OM$. Ainsi $\angle OAM = \angle OBM = 45^o$, d'où $\angle AOM = 90^o$. L'aire cherchée est donc celle d'un quart du cercle moins celle du triangle OAB de base 1 et hauteur 1, soit $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

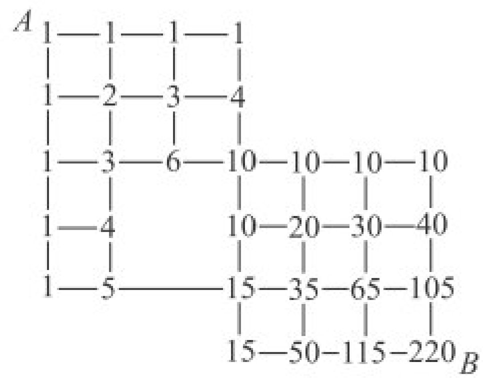


Question 4



De A à C, il y a 10 chemins possibles et de C à B, il y a 20 chemins. Donc de A à B (par le point C), il y a $10 \cdot 20 = 200$ chemins possibles. De A à D, il y a 5 chemins et de D à B, il y a 4 chemins. Donc, il y a $5 \cdot 4 = 20$ chemins de A à B (par le point D). Par conséquent, il y a 220 chemins courts possibles.

Deux participants ont donné une belle construction pour résoudre le problème : ils ont adapté la récurrence du triangle de Pascal. Il suffit de compter le nombre de chemins courts de A à chaque intersection I. Comme il faut provenir de l'intersection immédiatement au nord (IN) ou immédiatement à l'ouest (IO), on a



Nombre de chemins à I = nombre de chemins à IN + nombre de chemins à IO.
On fait le calcul sur la grille comme indiqué ci-contre.

Question 5

a. Chacun des zéros terminaux correspond à un facteur de 10, c'est-à-dire, un facteur 2 et un facteur 5. Comme il y a plus de facteurs 2 que de facteurs 5, il suffit de compter ces derniers. Parmi les nombres 1,2,3,…,52, les multiples de 5 sont 5,10,15,…,50 qui apportent chacun un facteur 5, sauf 25 et 50 qui en apportent 2 chacun. Il y a donc 12 facteurs 5, ce qui correspond à 12 zéros à la fin de $N = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times 52$.
b. De la même façon, on trouve, pour chaque premier p, le nombre de facteurs p de N. Par exemple (avec $p = 3$), parmi les nombres 1, 2, 3, …, 52, les multiples de 3 apportent chacun un facteur 3 (soit 17), les multiples de 9 en apportent chacun un supplémentaire (soit 5), le multiple de 27 en apporte encore un de plus. Au total, 23 facteurs de 3. En répétant le processus pour chaque premier, on trouve que

$$N = 2^{49} \times 3^{23} \times 5^{12} \times 7^{8} \times 11^{4} \times 13^{4} \times 17^{3} \times 19^{2} \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 41 \times 43 \times 47$$

Le dernier chiffre non nul de N est donc le chiffre des unités de

$$\frac{N}{10^{12}} = 2^{49} \times 3^{23} \times 5^{12} \times 7^{8} \times 11^{4} \times 13^{4} \times 17^{3} \times 19^{2} \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 41 \times 43 \times 47$$

Il suffit alors de faire le produit indiqué en ne gardant que le chiffre des unités dans chaque résultat intermédiaire. Par exemple, puisque $2^5 = 32$, le dernier chiffre de $2^{37} = (2^5)^7 \times 2^2$ sera celui de $2^7 \times 2^2$, qui est 2. Au final, le dernier chiffre non nul de N est 4.

Question 6

Un joueur qui parvient à systématiquement ramener son adversaire à une configuration où les extrémités des diagonales contiennent le même nombre de jetons gagnera. En effet, si un joueur doit jouer à partir d'une position de ce type, il devra retirer au moins un jeton d'une extrémité d'une diagonale sans pouvoir toucher à l'autre extrémité, et alors, pour au moins une des deux diagonales, les tas de jetons seront laissés avec des quantités différentes.
Maintenant, si un joueur doit jouer à partir d'une configuration qui n'est pas de ce type, nous allons montrer qu'il peut toujours jouer pour laisser l'adversaire dans une position de ce type. Soit a,b,c,d le nombre de jetons sur les coins A, B, C et D respectivement, avec au moins une des paires de diagonales opposées différentes, i.e. $a \neq c$ ou $b \neq d$. Sans perte de généralité, supposons $a > c$. Par symétrie, nous pouvons supposer que $b \geq d$ (le raisonnement est parfaitement symétrique si nous supposons $d \geq b$). Alors, le joueur joue sur l'arête AB en faisant $a'=c$ et $b'=d$, et il a ramené l'adversaire dans une position avec les diagonales égales. Comme la position finale ne contient que des tas vides, elle est de ce type et la démonstration est terminée.
Dans l'exemple avec A=10, B=11, C=12 et D=13, on joue sur l'arête BC en laissant 10 jetons sur le tas C et 11 jetons sur le tas D, ce qui laisse l'adversaire dans la configuration A=10, B=11, C=10 et D=11. C'est la seule façon correcte de jouer.

Question 7

On obtient une deuxième équation en remplaçant x par $-x : F(-x) - xF(x) = 1$.
On a alors le système linéaire (en $F(x), F(-x)$) :

$$F(x) + xF(-x) = 1,$$
$$-xF(x) + F(-x) = 1,$$

qu'on peut résoudre :

$$F(x) = \frac{1-x}{1+x^2}.$$