Solution, concours secondaire de l'AMQ 2020

Les solutions présentées ici sont relativement brèves, et ne sont pas les seules solutions acceptées dans le cadre du concours.

1. Le nombre 42. L'aire du 4 peut être obtenue en faisant des découpages variés. L'un de ceux-ci consiste à trouver l'aire de la partie oblique, qui est 9, et lui ajouter l'aire de la croix formant le reste de la figure, qui est 36. On obtient 45.

Le 2 est quant à lui formé d'un anneau de rayon intérieur 2 et de rayon extérieur 4, auquel on ajoute un rectangle d'aire 16. On a donc une aire de $\pi(16-4)+16$.

L'aire totale est $61+12\pi$.

2. Trois nombres premiers Ces trois nombres peuvent être 2, 11 et 13, ou 3, 7 et 11. On peut en effet obtenir de l'équation $xyz = 11(x+y+z)$, où x, y et z sont les trois nombres premiers recherchés, que l'un des nombres premiers est 11. Posons que ce nombre est x. On a alors que $yz = 11+y+z$. Posant $y=2$, puis $y=3$, on a les solutions (11, 2, 13) et (11, 3, 7), alors que $y=5$ ne donne pas de solution.

Pour montrer qu'il n'y a pas de solution pour $y>13$, on peut considérer la valeur que z devrait avoir pour un tel y. On obtient $z=(11+y)/(y-1)$. Comme $(11+y)<2(y-1)$ lorsque $y>12$, cela implique que $z<2$.

3. Un jeu arithmétique Andrée-Anne peut gagner en choisissant 1010 comme premier nombre. Si Benoît choisit alors un nombre n entre 1 et 2019 inclusivement, Andrée-Anne peut répondre en choisissant $2020-n$. Si Benoît choisit 2020, Andrée-Anne peut prendre la moyenne entre 1010 et 2020, qui est 1515.

Il est à noter que si on exclut 1 et 2020 des choix possibles, c'est Benoît qui a une stratégie gagnante, et ce en 4 coups.

4. Aire-igami. La figure est formée d'un grand triangle rectangle, dont l'aire est $\frac{1}{2}\times 12\times 18 = 108$, et d'un petit triangle rectangle dont une cathète est de mesure 12. Si on désigne par x la longueur de son autre cathète, on peut voir que son hypoténuse est de mesure $18-x$ (par symétrie, en considérant l'autre petit triangle rectangle qui lui est congruent). Le Théorème de Pythagore nous permet de déduire que

$$x^2+12^2=(18-x)^2$$

que l'on peut résoudre pour obtenir $x=5$. L'aire du petit triangle est donc 30, et l'aire totale demandée est 138.

5. Jouons encore ! Il n'y a que 4 manières dont la partie peut se terminer en 5 coups exactement. Il s'agit de P P P P F, F P P P F, F F P P F, qui donnent la victoire à Andrée-Ann, et de F F P F P, qui donne la victoire à Benoit. Comme ces résulats sont équiprobables, la probabilité demandée est $1/4=0,25$.

6. Combien de vaches ? Soit V la quantité d'herbe broutée par une vache en 2 semaines, H la quantité d'herbe sur un terrain de 2 hectares, et R la quantité d'herbe qui repousse sur un terrain de 2 hectares en 2 semaines. On peut traduire les énoncés de départ par les équations $3V = H + R$ et $2 \times 2V = H + 2 \times R$. On peut obtenir de ces deux équations que $V = R$, puis que $H = 2R$.

La question est de trouver la valeur de n pour que $n \times 3V = 3H + 3 \times 3R$, ce qui revient à $3nR = 6R + 9R$, d'où $n = 5$. La réponse est 5.