Concours secondaire de l'AMQ, 14 février 2019

Pour cette présentation des solutions, la formulation de certaines questions a été abrégée. Il en est de même de la rédaction des solutions, qui ne sont par ailleurs pas les seules solutions acceptées dans le cadre du concours.

1. Toujours carré. On peut remarquer que le résultat de $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1$ est 25, qui est un carré parfait. Prouver que le produit de quatre entiers naturels consécutifs, auquel on ajoute 1, donne toujours un carré parfait.

Solution On a que $(n-1)n(n+1)(n+2)+1 = (n^3-n)(n+2)+1 = n^4+2n^3-n^2-2n+1 = (n^2+n-1)^2$, qui est bien un carré parfait.

2. Alicia peut-elle gagner ? Dans un jeu à deux joueurs, on doit placer tous les nombres de 1 à 9 dans les neuf cases d'une grille 3 par 3.

– Le premier joueur inscrit un nombre de 1 à 9 sur une des cases de la grille.
– À son tour, le deuxième joueur inscrit un nombre sur une des cases libres de la grille. Ce nombre doit être différent de tous ceux déjà inscrits.
– Le jeu continue en alternance.
– Le premier joueur gagne si, à un moment, la somme des trois nombres dans au moins une ligne ou une colonne est 14.
– Le deuxième joueur gagne si cela ne se produit pas (et que les neuf nombres ont été inscrits).

Alicia débute la partie. Benoit joue en deuxième. *Est-ce qu'Alicia peut jouer de sorte à pouvoir toujours gagner ?* Si elle peut, expliquer clairement en quoi consiste sa stratégie et montrer qu'elle est gagnante. Si elle ne peut pas, expliquer comment Benoit peut jouer pour réussir à la battre.

Solution Alicia peut gagner. Une stratégie consiste à jouer le 1 au centre. Pour la suite, on considère les couples de nombres (9,4), (8,5), (7,6) et (2,3). Alors, pour chaque nombre inscrit par Benoit dans une case, elle inscrit l'autre nombre du couple dans la case diamétralement opposée. De cette manière, il y aura au plus deux des trois couples (9,4), (8,5) et (7,6) qui seront sur une diagonale, de sorte qu'au moins un est sur la colonne ou la ligne centrale, donnant une somme de 14 avec le 1 du centre.

3. Combien de dés doit-il relancer ? Un jeu consiste à lancer cinq dés une première fois. Par la suite, on peut sélectionner certains des 5 dés (possiblement aucun ou tous) et les relancer afin d'obtenir une combinaison voulue. Jérôme lance les cinq dés et obtient le résultat suivant : 1-2-4-2-1. Son objectif est d'obtenir trois résultats semblables au minimum. Il se demande s'il devrait relancer un seul dé (le 4) ou bien en relancer trois (les 2-4-2).*Quel est le meilleur choix ? Bien justifier la réponse.*

Solution Dans le cas où il relance le dé 4, la probabilité qu'il réussisse est $2/6 = 1/3$.

Dans la cas où il relance trois dés, il peut réussir en obtenant au moins une fois le 1. Sur les $6^3 = 216$ résultats possibles, il y en a $5^3 = 125$ qui n'ont pas de 1. Il y en a donc $216 - 125 = 91$ avec au moins un 1. La probabilité de réussite est donc de $91/216$, qui est plus grand que $1/3$. Il est mieux de relancer trois dés.

On peut aussi obtenir la probabilité exacte de réussite, en ajoutant la probabilité d'avoir un nouveau triplé (de 2-2-2 à 6-6-6), ce qui représente 5 résultats de plus. Il a donc une probabilité de réussite de $96/216 = 4/9$.

4. Intersections variables. Soit la paire d'équations suivantes

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ (x-a)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

où a est un nombre réel. Une solution de la paire d'équations est alors donnée par un couple, lequel est formé par une valeur de x et une valeur de y. Pour quelles valeurs de a cette paire d'équations possède-t-elle 0, 1, 2, 3 ou 4 solutions ?

Solution Nous donnons une solution utilisant la représentation dans le plan cartésien. La première équation se ramène à $(x-y)(x+y) = 0$, ce qui est représenté par les deux droites $y = x$ et $y = -x$. La deuxième équation représente le cercle de rayon 1 centré en $(a, 0)$. Ce cercle est tangent aux deux droites quand $a = \pm\sqrt{2}$, et il y a alors deux solutions. Il ne touche pas les droites quand $|a| > \sqrt{2}$, et il n'y a alors aucune solution. Il passe par le point $(0,0)$ et coupe les droites en deux autres points lorsque $a = \pm 1$, et il y a alors 3 solutions. Il y a quatre solutions autrement, car le cercle coupe les deux droites en quatre points (i.e. pour $|a| < \sqrt{2}$ et $a \neq \pm 1$).

5. Un simple déplacement. Il est possible de démontrer que si on applique successivement des translations et des rotations dans le plan, alors on obtient un déplacement qui peut être donné soit par une seule translation, soit par une seule rotation, et ce, pour tous les points du plan (qui sont notés $P(x,y)$ en coordonnées cartésiennes). On applique les trois déplacements suivants dans l'ordre indiqué :

– une translation de -1 en x ;
– une rotation de centre $(0,0)$ de $90°$ en sens anti-horaire ;
– une translation de 2 en y.

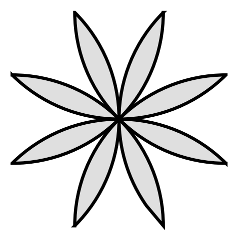
Trouver en le justifiant la translation ou la rotation qui résulte de cette suite d'opérations.

Solution Il s'agit d'une rotation de $90°$ en sens anti-horaire, ce qui se justifie de diverses manières. Voici une démarche, dans laquelle on considère les transformations appliquées à deux points : $A(0,0)$ et $B(-1,0)$. On a $A(0,0) \to (-1,0) \to (0,-1) \to (0,1)$ et $B(-1,0) \to (-2,0) \to (0,-2) \to (0,0)$. On a donc que le déplacement obtenu est tel $A(0,0) \to A'(0,1)$ et $B(-1,0) \to B'(0,0)$. Il ne peut s'agir d'une translation car on n'aurait pas le même vecteur de translation pour A et B.

C'est donc une rotation. Son centre doit être équidistant de A et A', donc sur la médiatrice du segment AA', qui est la droite $y = 1/2$. De même, il doit être sur la médiatrice de BB', qui est la droite $x = -1/2$. Le centre est donc le point $O(-1/2, 1/2)$.

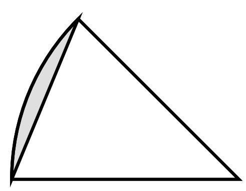
Il reste à trouver l'angle de la rotation. En considérant A et A', on voit que cet angle est de $90°$ en sens anti-horaire.

6. L'aire d'une fleur. Une fleur contenant 8 pétales est symétrique sur 8 axes. De plus, ses pétales adjacents sont tangents les uns aux autres. Chaque pétale est constitué de deux arcs de cercle de rayon 1 cm. Quelle est l'aire de la fleur (l'aire de la zone grisée) ? Justifier.



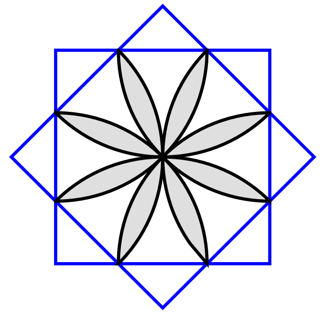
Solution L'aire est de $2\pi - 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$.

Comme les arcs de cercles sont tangents entre eux, on voit que les angles aux deux extrémités de chaque pétale sont de $45°$. En utilisant les angles inscrits (il y a ici un travail plus difficile à faire pour les jeunes du secondaire), on peut montrer que l'arc de cercle des pétale mesure $45°$. On a

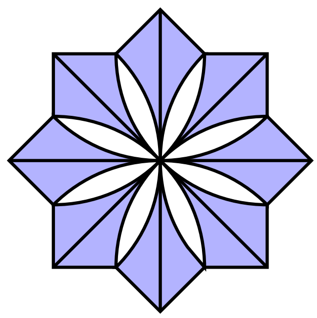


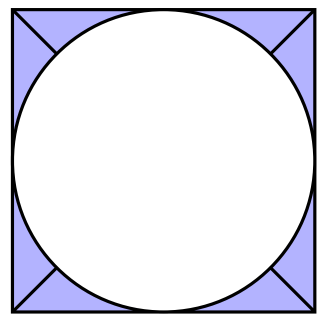
L'aire du secteur ciculaire est $\frac{\pi}{8}$ puisque le rayon est 1, et l'aire du triangle est $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Pour les 16 demi-pétales, on obtient $A = 16\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 2\pi - 4\sqrt{2}$.

Ici, on se permet de donner les idées maîtresses d'une autre solution, proposée par Benoit Pouliot, concepteur du problème. Elle est trop jolie pour s'en priver. On peut considérer les centres des huit cercles qui, par symétrie, forment un octogone régulier. Et si on considère les centres de ces cercles, on peut aussi former deux carrés, représentés ci-dessous.



On peut calculer l'aire des deux carrés, en excluant les 8 pétales. On sépare en 16 régions identiques, sur la figure de gauche, que l'on peut par la suite déplacer pour obtenir la figure de droite.





Le grand carré, à droite, a des côtés de mesure 2 car les cercles sont de rayon 1. Ainsi, l'aire de 8 de ces régions est $A_1 = 4 - \pi$.

Aussi, comme on l'a vu plus haut, les 16 régions sont créées à partir de l'intersection de deux carrés. Ces carrés sont de côté $\sqrt{2}$ et par conséquent les côtés droits des petites régions sont de $\sqrt{2} - 1$. L'aire de l'intersection des deux carrés est donc, $A_2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2} - 1)^2 = 8 - 4\sqrt{2}$. L'aire des pétales est alors donnée par $A = A_2 - 2A_1 = 8 - 4\sqrt{2} - 2(4 - \pi) = 2\pi - 4\sqrt{2}$.