

Concours de l'AMQ 2017, ordre secondaire

16 février 2017

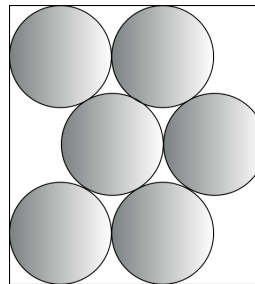
AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Le Concours de l'Association mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. L'utilisation de la calculatrice est permise mais n'est pas nécessaire. Détaillez vos réponses dans l'espace prévu à cet effet après chaque question.

La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponse, dans le cas d'une solution incomplète. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

1. Les bouteilles bien rangées

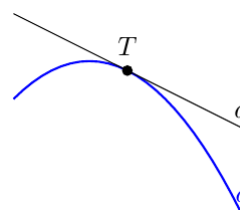
Après le réveillon du nouvel an, le père de Justin lui a demandé d'aller porter les bouteilles vides des invités au dépanneur. Afin de faciliter le transport, Justin a placé six de ces bouteilles dans une boîte qu'il a trouvée, dans laquelle elles entrent tout juste, avec la configuration illustrée ci-contre (vue de haut). Sachant que chaque bouteille a un diamètre de 10 centimètres, quelles sont les dimensions exactes du fond de la boîte ?



2. Si la tangente se maintient

Une droite d est *tangente* à une courbe c donnée si elle touche cette courbe en un point T mais sans la traverser en ce point, comme sur la figure ci-contre.

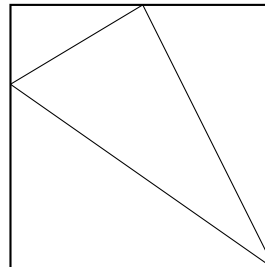
Pour quelles valeurs de k la droite d'équation $y = x + k$ est-elle tangente à la parabole d'équation $y = x^2 + kx + 1$?



3. Triangulation impossible !

Une *triangulation* est un découpage d'une figure géométrique en un certain nombre de triangles. Par exemple, la figure ci-contre montre une triangulation d'un carré en quatre triangles.

Démontrer qu'il n'existe aucune triangulation du carré en seulement trois triangles, telle que ces trois triangles aient tous la même aire.



4. Un grand nombre de chiffres !

Quels sont les deux derniers chiffres (c'est-à-dire, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités) du nombre $7^{(9^{(3^5)})}$?

5. Trouvez le triplet

Trois nombres entiers consécutifs, $a < b < c$, satisfont l'équation suivante.

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{4986}{abc}$$

Trouvez ces trois nombres.

6. Un truel à Pile-ou-Face

Agathe, Bertrand et Cédric jouent à un jeu à tour de rôle : d'abord Agathe, ensuite Bertrand, et finalement Cédric. Après Cédric, Agathe recommence, et ainsi de suite.

À son tour, chaque joueur désigne un autre joueur encore en jeu pour lancer une pièce de monnaie. Si la personne désignée obtient *Face*, alors elle est immédiatement éliminée. Si elle obtient *Pile*, alors elle peut continuer le jeu. La dernière personne en jeu remporte la partie.

Agathe et Bertrand décident de s'allier contre Cédric. Ils le désignent donc à chaque tour pour lancer la pièce de monnaie, tant qu'il est présent sur le jeu. Cédric, quant à lui, désigne toujours Bertrand s'il n'est pas éliminé. Quelle est la probabilité que Cédric remporte la partie ?