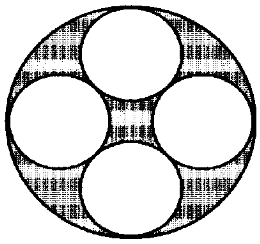
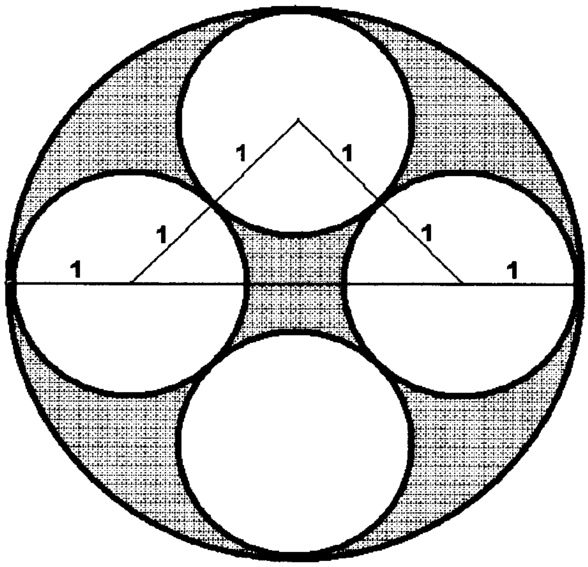
CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC
Ordre secondaire
Le 7 février 2008, de 14h00 à 17h00
Les calculatrices électroniques sont autorisées
CORRIGÉ

1. Les quatre petits cercles dans un grand



Quatre cercles de rayon 1 sont tangents l'un à l'autre et à un grand cercle qui les contient, comme dans la figure ci-contre. Calculer l'aire de la région ombrée, à l'intérieur du grand cercle mais hors des petits cercles.

Solution



Par le théorème de Pythagore, la distance entre les centres de deux cercles non adjacents est $\sqrt{8}$. Ainsi le diamètre du grand cercle est

$$2 + \sqrt{8} = 2 + 2\sqrt{2}$$

et son rayon est $R = 1 + \sqrt{2}$. L'aire du grand cercle est

$$\pi R^2 = \pi(1+\sqrt{2})^2.$$

Les petits cercles sont de rayon $r = 1$ et d'aire π. L'aire cherchée est donc

$$\pi\,[(1+\sqrt{2})^2 - 4] = \pi\,(2\sqrt{2} - 1).$$

2. Les pourboires au restaurant

Bernard et Claire ont dîné au restaurant. Les mets que Bernard a choisis dans le menu coûtaient au total deux fois plus cher que ceux que Claire a choisis.

Ce jour-là la taxe fédérale, TPS, était de 6 %. La taxe provinciale, TVQ, était de 7,5 % et portait sur le coût des produits et services, augmenté de la taxe fédérale.

Bernard a aimé son repas, mais il n'était pas content du service. Il a décidé de donner un pourboire de seulement 10 % du coût de son repas, incluant les taxes. De son côté, Claire donne 20 % du coût de son repas, mais sans compter les taxes.

Bernard et Claire ont dépensé ensemble \$ 121.16 pour leur dîner. Combien coûtait le repas de Claire selon le menu ?

Solution

Soit x le coût des mets choisis par Claire. Alors Bernard a payé

$$(2)(1{,}06)(1{,}075)(1{,}1)x = 2{,}5069x$$

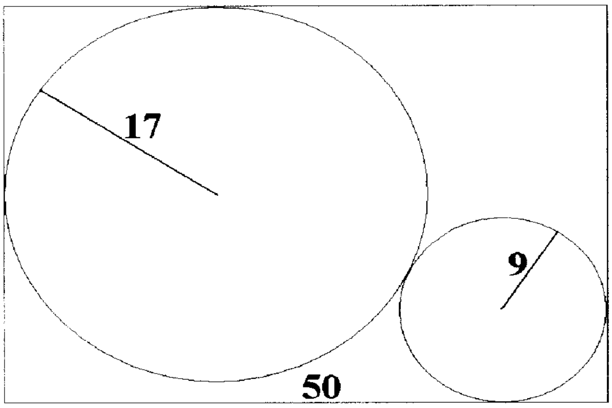
et Claire a payé

$$[(1{,}06)(1{,}075) + 1{,}2]x = 2{,}3395x.$$

On obtient

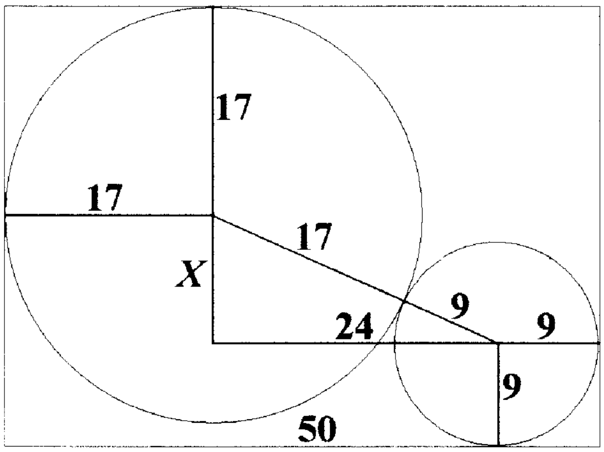
$$4{,}8464x = 121{,}16 \text{ ou } x = \$\ 25{,}00.$$

3. Les cercles dans un rectangle



Deux cercles de rayons de 9 cm et de 17 cm sont contenus dans un rectangle dont un des côtés est de 50 cm. Les deux cercles sont tangents l'un à l'autre et touchent à deux côtés adjacents du rectangle, comme dans la figure. Calculer l'aire du rectangle.

Solution



Dans chacun des deux cercles, on joint le centre aux points de contact avec les côtés du rectangle, On joint ensuite les centres des triangles On prolonge le rayon vertical du cercle de rayon 17 et le rayon horizontal du cercle de rayon 9. On obtient un triangle rectangle dont l'hypoténuse est de 26 cm et dont un côté de l'angle droit est de 24 cm. L'autre côté de l'angle droit est donc de 10 cm, la hauteur du rectangle est de 36 cm et l'aire du rectangle est de $50 \times 36 = 1800$ cm^2

4. Les différences de deux carrés

Le nombre 51 peut être exprimé de deux façons comme la différence des carrés de deux entiers:

$$10^2 - 7^2 = 100 - 49 = 51$$

et

$$26^2 - 25^2 = 676 - 625 = 51.$$

4,1 Trouver (cinq points) toutes les façons d'exprimer le nombre 45 comme différence des carrés de deux entiers.

4,2 Trouver (cinq points) tous les entiers qui ne peuvent pas être exprimés comme différence des carrés de deux entiers.

Solution

4,1 On demande toutes les solutions en entiers de l'équation

$$x^2 - y^2 = 45.$$

D'une part, on a

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

D'autre part, 45 peut s'écrire de trois façons comme produit de deux entiers: 1×45, 3×15 et 5×9.

Avec $x + y = 45$ et $x - y = 1$, on obtient $x = 23$, $y = 22$ et $23^2 - 22^2 = 529 - 484 = 45$.

Avec $x + y = 15$ et $x - y = 3$, on obtient $x = 9$, $y = 6$ et $9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45$.

Avec $x + y = 9$ et $x - y = 5$, on obtient $x = 7$, $y = 2$ et $7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$.

4,2 Les solutions du système d'équations

$$x + y = a,\ x - y = b$$

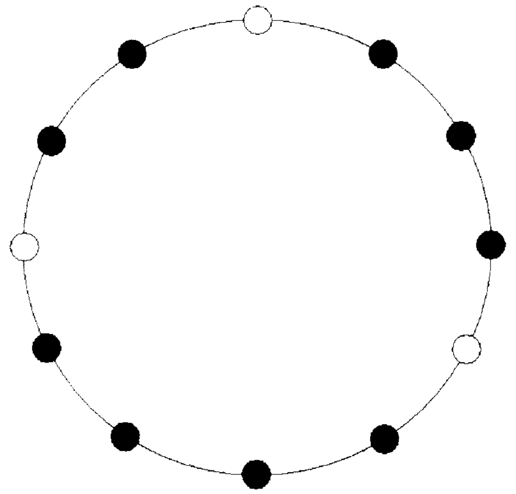
sont

$$x = (a + b)/2 \text{ et } y = (a - b)/2.$$

Ces solutions sont des entiers à la condition que a et b soient ou bien tous deux pairs, ou bien tous deux impairs; en d'autres mots, qu'ils soient de même *parité*.

Ainsi les nombres entiers qui ne peuvent pas être exprimés comme la différence des carrés de deux nombres sont ceux qui ne peuvent pas être le produit de deux nombres de même parité. Ces nombres, ce sont les entiers qui sont divisibles par 2, mais non par 4.

5. Les colliers de douze perles



Combien de colliers différents peut-on former avec douze perles, dont trois sont blanches et les neuf autres sont noires ?

Solution

Notons les perles blanches par un X. Un chiffre entre deux X indique le nombre de perles noires entre les deux perles blanches, s'il y en a. Ainsi le collier de l'illustration est décrit par X2X3X4.

On peut distinguer quatre cas, d'après le plus petit des trois chiffres qui indiquent les positions des perles noires..

Cas 1. Le plus petit des trois chiffres est zéro. Les possibilités sont

XXX9, XX1X8, XX2X7, XX3X6, XX4X5.

La description suivante serait XX5X4, mais elle décrit le même collier que XX4X5. Le cas 1 contient donc cinq colliers différents.

Cas 2. Le plus petit des trois chiffres est 1. On a quatre colliers:

X1X1X7, X1X2X6, X1X3X5, X1X4X4.

Cas 3. Le plus petit des trois chiffres est 2. On a deux colliers:

X2X2X5, X2X3X4.

Cae 4. Le plus petit des trois chiffres est 3. Un seul collier: X3X3X3.

Total: $5 + 4 + 2 + 1 = 12$ colliers.

6. Le livreur de pizza.

Giuseppe Pizza se vante de sa ponctualité. Si son livreur sonne à votre porte après l'heure convenue, votre pizza est gratuite !

Notre ami Marcel a commandé une grande pizza pour le souper de sa famille. L'heure convenue, 19:00, approche. Il se demande si sa pizza sera gratuite. Il s'installe devant sa grande horloge pour observer les aiguilles. Chaque minute est indiquée par un point bien visible.

Au moment où tinte la sonnerie de la porte, Marcel note que l'aiguille des heures est exactement devant un des points et que l'aiguille des minutes est exactement quatorze points plus loin.

Quelle heure est-il ?

Solution 1

Numérotons les points des minutes de 0 à 59. Soit m la position de l'aiguille des minutes et h la position de l'aiguille des heures. Quand l'aiguille des heures est à un point des minutes, il n'y a que cinq possibilités pour l'aiguille des minutes: $m = 0$, 12, 24, 36 ou 48. Pour chacune de ces positions, il s'agit de savoir si $h = m - 14$ est compatible avec m.

Si $m = 0$, alors $h = 60 - 14 = 46$. Mais $h = 46$ signifie qu'il est 9:12. Non compatible.

Si $m = 12$, alors $h = 72 - 14 = 58$. Mais $h = 58$ signifie qu'il est 11:36. Non compatible.

Si $m = 24$, alors $h = 10$. Mais $h = 10$ signifie qu'il est 2:00. Non compatible.

Si $m = 36$, alors $h = 22$. Mais $h = 22$ signifie qu'il est 4:24. Non compatible.

Si $m = 48$, on a $h = 34$, qui signifie qu'il est 6:48, de sorte que h et m sont compatibles. La sonnerie a donc tinté à 18:48.

Solution 2

Numérotons les points des minutes de 0 à 59. Supposons que la sonnerie a tinté à h heures et m minutes.

En douze heures, l'aiguille des heures fait une fois le tour du cadran, tandis que l'aiguille des minutes le parcourt douze fois. Pour déterminer le chemin parcouru par l'aiguille des heures depuis midi, on divise donc par douze le chemin parcouru par l'aiguille des minutes depuis midi. Au moment où tinte la sonnerie, l'aiguille des heures est devant le point

$$(60h + m)/12$$

et celle des minutes est devant le point m. On obtient l'équation

$$m - [(60h + m)/12] = 14$$

ou

$$-60h + 11m = 168.$$

Les solutions entières de cette équation sont données par les formules

$$h = 6 + 11k \text{ et } m = 48 + 60k,$$

où k est un entier non négatif. Comme $m < 60$, on a $k = 0$ et la sonnerie a tinté à 18:48.

7. Le procédé de Kaprekar

On considère un entier quelconque à trois chiffres qui n'est pas un multiple de 111, disons 172.

Le procédé de Kaprekar consiste à changer deux fois l'ordre des chiffres d'un entier pour les mettre d'abord en ordre décroissant, puis en ordre croissant; on calcule ensuite la différence des deux entiers ainsi obtenus.

Dans notre exemple, avec 172, on obtient

$$721 - 127 = 594.$$

Le procédé de Kaprekar appliqué à 594 donne

$$954 - 459 = 495.$$

Cet entier, 495, reste inchangé si on lui applique le procédé de Kaprekar. C'est pourquoi on l'appelle la *constante de Kaprekar* pour les entiers à trois chiffres.

Le procédé s'applique même aux entiers à moins de trois chiffres. Il suffit de les faire précéder d'un ou deux zéros. Ainsi le procédé de Kaprekar appliqué à l'entier 7 donne

$$700 - 007 = 693,$$

puis

$$963 - 369 = 594$$

et enfin

$$954 - 459 = 495.$$

Ainsi l'entier 172 nécessite deux applications du procédé de Kaprekar pour être transformé dans la constante de Kaprekar, tandis que l'entier 7 en exige trois.

Trouver le nombre maximal d'applications du procédé de Kaprekar nécessaire pour transformer dans la constante de Kaprekar un entier quelconque à trois chiffres qui n'est pas un multiple de 111.

Solution

Soit N un entier à trois chiffres qui n'est pas un multiple de 111. Soient a, b et c les trois chiffres de N. On peut supposer que $a \geq b \geq c$ et que $a > c$. Soit K(N) le nombre obtenu de N par une application du procédé de Kaprekar. Alors

$$\begin{aligned} K(N) &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) \\ &= 100\,(a - c) + (c - a) \\ &= 99\,(a - c), \end{aligned}$$

où $a - c$ est un nombre entre 1 et 9. Ainsi K(N) est un des nombres 99, 198, 297, ..., 891.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathit{100} & \rightarrow & \mathbf{99} & \rightarrow & \mathbf{891} & \leftarrow & \mathit{900} \\
 & & & & \downarrow & & \\
\mathit{200} & \rightarrow & \mathbf{198} & \rightarrow & \mathbf{792} & \leftarrow & \mathit{800} \\
 & & & & \downarrow & & \\
\mathit{300} & \rightarrow & \mathbf{297} & \rightarrow & \mathbf{693} & \leftarrow & \mathit{700} \\
 & & & & \downarrow & & \\
\mathit{400} & \rightarrow & \mathbf{396} & \rightarrow & \mathbf{594} & \leftarrow & \mathit{600} \\
 & & & & \downarrow & & \\
\mathit{500} & & \longrightarrow & & \mathbf{495} & &
\end{array}$$

Dans le tableau ci-dessus, une flèche indique une application du procédé de Kaprekar. Les multiples de 100, en italiques, représentent chacun un ensemble de nombres avec la même valeur de $a - c$; 500, par exemple, représente tous les nombres où $a - c = 5$.

Le chemin le plus long est celui qui va de 100 à 495. Il montre que tout nombre à trois chiffres est transformé dans la constante de Kaprekar en au plus six itérations du processus.