Association
mathématique
du Québec

Concours de l'Association mathématique du Québec

Ordre secondaire

Le jeudi 15 février 2018

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

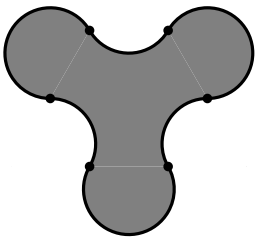
Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note *: L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. La toupie à main

Sur la figure suivante, on a représenté le dessus d'une toupie à main. Les courbes entre deux points sont tous des arcs de cercle de rayon 1 cm. En leur point de contact, les tangentes de deux courbes sont confondues. De plus, la toupie est bien équilibrée, c'est-à-dire qu'elle possède trois axes de symétrie.



Trouvez l'aire représentée par la figure.

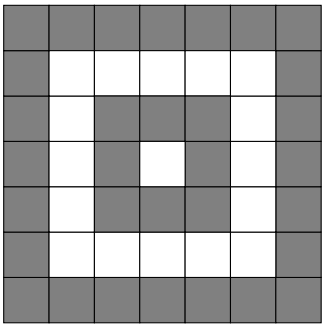
2. Les trois amies

Amandine, Béatrice et Camille sont trois bonnes amies. Il y a dix ans, Amandine avait le double de la somme des âges de Béatrice et de Camille. Aujourd'hui, Amandine a le triple de la différence des âges de Béatrice et de Camille. Nous savons de plus que Camille a l'âge que Béatrice avait lorsque Béatrice avait exactement le tiers de l'âge d'Amandine.

Quels sont les âges des trois amies ?

3. Qui commence ?

Deux joueurs jouent à un jeu sur un damier carré 7×7, dont les cases d'une même couronne sont colorées de la même couleur (voir figure). Les joueurs placent tour à tour des pièces sur le damier, mais doivent respecter les règles suivantes :

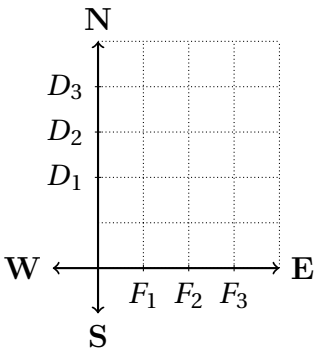


- Le premier joueur joue sur le contour du carré.
- À son tour, chaque joueur doit poser sa pièce sur l'une des cases voisines de la pièce qui vient d'être jouée par l'autre joueur (il est interdit de jouer en diagonale). Cette case ne doit pas déjà être occupée par une pièce.
- Dès qu'un joueur pose une pièce sur une nouvelle couronne, il est interdit de revenir à la couronne précédente pour le reste de la partie.

Un joueur perd la partie lorsqu'il est impossible pour son adversaire de jouer un prochain coup.

Si vous aviez à jouer à ce jeu, préféreriez-vous débuter la partie ou jouer en second ? Selon votre choix, trouvez une stratégie permettant de gagner *toutes* les parties. Vous devez présenter, par des arguments rigoureux, pourquoi votre stratégie est infaillible.

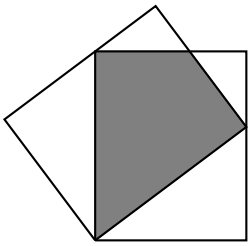
4. Les fourmis



Trois fourmis sont positionnées sur le plan en $D_1 = (0,2)$, $D_2 = (0,3)$ et $D_3 = (0,4)$. Chaque fourmi se déplace à coups de pas entiers de longueur 1 et ne peut faire des pas que vers l'est (**E**) ou vers le sud (**S**) (aucun pas vers le nord ou vers l'ouest). La fourmi en position D_1 doit se rendre au point $F_1 = (1,0)$, celle en position D_2 au point $F_2 = (2,0)$ et celle en position D_3 au point $F_3 = (3,0)$.

Si les chemins des trois fourmis ne peuvent se toucher en aucun point commun, alors de combien de façons peuvent-elles se rendre du point de départ au point d'arrivée ?

5. Les cartons entiers



Mathilde possède deux cartons rectangulaires de mêmes dimensions. Ces dimensions (la hauteur et la largeur) sont des nombres entiers de centimètres. La hauteur des cartons est strictement supérieure à leur largeur. Mathilde superpose les deux cartons comme sur la figure ci-contre.

Elle réalise alors que l'aire du quadrilatère formé par la superposition des deux cartons (en gris sur la figure) est un nombre entier de centimètres carrés. Quelle est la hauteur minimale que pourraient avoir ces cartons ?

6. Un nombre diabolique !

Trouvez le nombre représenté par l'expression infinie suivante.

$$\cfrac{6}{\cfrac{6}{\cfrac{6}{\cfrac{6}{\cfrac{6}{\ldots - 6} - 6} - 6} - 6} - 6} - 6 + \cfrac{6}{6 + \cfrac{6}{6 + \cfrac{6}{6 + \cfrac{6}{6 + \cfrac{6}{6 + \ldots}}}}}$$