Association mathématique du Québec

Concours 2016, ordre secondaire

Le mercredi 10 février 2016, en matinée

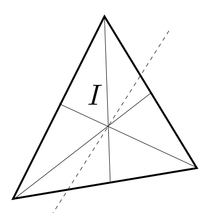
Le Concours de l'Association mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. L'utilisation de la calculatrice est permise mais n'est pas nécessaire.

La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponse, dans le cas d'une solution incomplète. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

1 La fortune du père

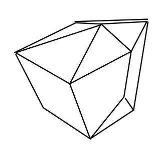
Sentant sa fin arriver, un vieillard appelle ses enfants à son chevet afin de leur partager sa fortune. Il demande au plus vieux de prendre une pièce d'or de son coffre et le dixième du reste. Après que l'ainé se soit servi, le père demande au deuxième plus âgé de ses enfants de prendre deux pièces d'or et le dixième du reste. Il continue ainsi avec le k-ième plus âgé des enfants auquel il demande de prendre k pièces d'or et le dixième du reste. Le dernier enfant reçoit seulement le reste du coffre.

Si les enfants ont tous reçu la même quantité d'or alors combien d'enfants avait le vieillard et combien d'or chacun a-t-il reçu ?



2 J'ai l'aire d'une moitié

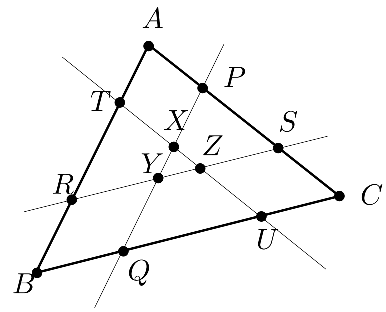
Soit I le point d'intersection des trois bissectrices intérieures d'un triangle. Démontrez que toute droite passant par I divise le périmètre du triangle en deux parties égales si et seulement si cette droite divise l'aire du triangle en deux parties égales.



3 Deux faces

Un polyèdre possède n sommets. Montrez qu'il existe au moins deux sommets qui sont voisins du même nombre de faces.

4 Tel père, tel fils



Soit un triangle $\triangle ABC$ et des segments PQ, RS et TU parallèles à AB, BC et CA, respectivement. Supposons que ces trois segments, tels qu'illustrés dans la figure ci-dessous, se rencontrent aux points X, Y et Z.

Si chaque segment PQ, RS et TU subdivise le triangle $\triangle ABC$ en deux parties d'aire égale, et si l'aire du triangle intérieur $\triangle XYZ$ est 1, alors quelle est l'aire de $\triangle ABC$.

5 Couper la poire encore et encore

Le processus mathématique infini illustré ci-dessous est bien défini et représente un nombre réel. Quel est ce nombre ?

$$1 + \cfrac{2 + \cfrac{1 + \cfrac{2 + \cfrac{1+\cdots}{3+\cdots}}{3 + \cfrac{1+\cdots}{2+\cdots}}}{3 + \cfrac{1 + \cfrac{2+\cdots}{3+\cdots}}{2 + \cfrac{1+\cdots}{3+\cdots}}}}{3 + \cfrac{1 + \cfrac{2 + \cfrac{1+\cdots}{3+\cdots}}{3 + \cfrac{1+\cdots}{2+\cdots}}}{2 + \cfrac{1 + \cfrac{2+\cdots}{3+\cdots}}{3 + \cfrac{1+\cdots}{2+\cdots}}}}$$

6 Le meilleur nombre rationnel

Trouvez le plus petit rationnel $\frac{r}{s}$ tel que pour tous les entiers positifs k, m et n satisfaisant

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1\,,$$

nous avons alors

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{r}{s}\,.$$