Concours de l'AMQ 2014, ordre secondaire

Le Concours de l'Association Mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. **Les calculatrices sont interdites.**

La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

---

1 Réparez cette imprimante !

Un libraire achète 360 exemplaires d'un manuel. La facture est mal imprimée car elle indique un coût total de

$$*5555, ** \ \$\,,$$

les symboles $*$ représentant des chiffres illisibles. Quel est le coût de chaque manuel, sachant qu'il ne dépasse certainement pas 150 $?

2 Chevaliers de la table ronde

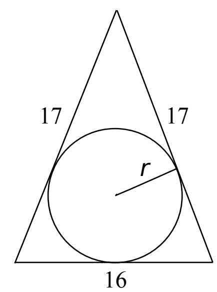
Ce jour-là, le roi Arthur décide d'envoyer des chevaliers à la recherche du Graal. Ceux-ci doivent être tout équipés, c'est-à-dire : avoir une épée, une armure, un bouclier et un cheval. Or, 95 % des chevaliers ont leur épée, 90 % ont leur cheval, 80 % leur bouclier et 70 % leur armure. Trouvez la proportion minimale et la proportion maximale de chevaliers tout équipés.

3 À la brasserie

Tournoi revanche au bras de fer entre Hercule Lamontagne et Maxime Lacasse ! Le tournoi comporte autant de rondes que nécessaire, le gagnant étant le premier à remporter 2 rondes de plus que son adversaire. (Chaque ronde se termine par une victoire d'un des deux participants.) Les deux joueurs sont à peu près de force égale car Hercule n'a fini par gagner qu'au bout de 18 rondes. De combien de façons a pu se dérouler le tournoi ?

4 L'éternel triangle

Dans le triangle de côtés 16, 17, 17, quel est le rayon du cercle inscrit ?



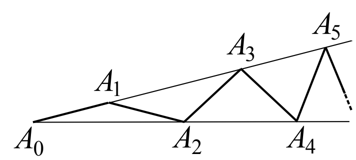
5 Les racines carrées

Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-5} = \sqrt{x}\,.$$

6 Zigzag

Deux droites se coupent en un point A_0 et sont séparées d'un angle de 6°. On prend des points A_2, A_4, A_6, $\ldots$ sur l'une des droites et A_1, A_3, A_5, $\ldots$ sur l'autre, de sorte que les segments $A_0\,A_1$, $A_1\,A_2$, $A_2\,A_3$, $A_3\,A_4$, $\ldots$ aient tous la même longueur. Quel est le nombre maximal de segments distincts qu'on peut placer ainsi ?



7 Pas plus d'un dissident

Sur les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre, on place des nombres réels a, b, c, d (respectivement). Sur chacune des arêtes, on place la somme des nombres associés à ses deux extrémités (ce sera le poids de l'arête). Les nombres sont choisis pour que le produit des poids de deux arêtes opposées (i.e. n'ayant aucune extrémité en commun) soit toujours le même. Montrez qu'au moins trois des nombres a, b, c, d sont égaux.