



Association mathématique du Québec (AMQ)

Concours 2013, ordre secondaire

7 février 2013, de 09h00 à 12h00

Le Concours de l'Association Mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Toutes les questions valent 20%, sauf les questions 2 et 3 qui valent 10%. Donnez des réponses complètes et détaillées. **Les calculatrices sont interdites.**

La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. *Bonne chance!*

**Question 1: Le temps qui passe**

20 %

Cette question concerne un rameur dans un canoë sur une rivière. La vitesse du courant de la rivière est constante et on l'évalue à 10 km/h. La vitesse du canoë en eau calme est aussi constante. Toutefois, en présence de courant, cette dernière est influencée selon que le rameur avance à contre-courant (ce qui le ralentit) ou avec le courant (ce qui l'accélère).

Les questions (1) et (2) ci-dessous sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Il faut au rameur une heure de plus pour parcourir 2,2 km en remontant le courant que pour parcourir la même distance en le descendant. Quelle est la vitesse du canoë en eau calme?
2. Il faut au rameur deux fois plus de temps pour parcourir 2,2 km en remontant le courant que pour parcourir la même distance en le descendant. Quelle est la vitesse du canoë en eau calme?

**Question 2: L'ainé des nôtres**

10 %

Définition de *Algorithme* : Ensemble de règles opératoires propres à un calcul.

Voici, sous sa forme la plus simple, un algorithme proposé par Euclide :

1. On prend deux nombres entiers non-nuls  $a$  et  $b$  avec  $a > b$ .
2. On soustrait le plus petit nombre du plus grand. On obtient le nombre  $c$ .
3. Si  $c = b$ , l'algorithme est terminé et son résultat est  $c$ . Sinon, on renomme les nombres  $b$  et  $c$  de la façon suivante : le plus grand des deux devient  $a$  et le plus petit des deux devient  $b$ . On retourne ensuite à la première étape de l'algorithme (autant de fois que nécessaire ; l'algorithme finira par finir !).

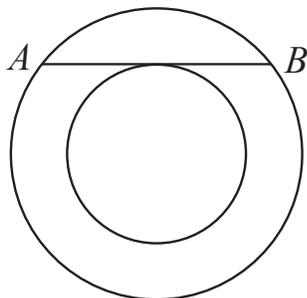
Que donne le résultat de cet algorithme lorsque  $a = 323$  et  $b = 119$  et quel nom donne-t-on, en général, à ce résultat ?

**Question 3: Il y a une différence entre nous mon cher Pythagore**

10 %

Définition de *Concentrique* : Qui a un même centre.

La tangente à un cercle coupe un deuxième cercle, concentrique au premier, en  $A$  et  $B$ . La longueur du segment  $AB$  est égale à 10 cm. Quelle est l'aire de l'anneau (région comprise entre les deux cercles) ?



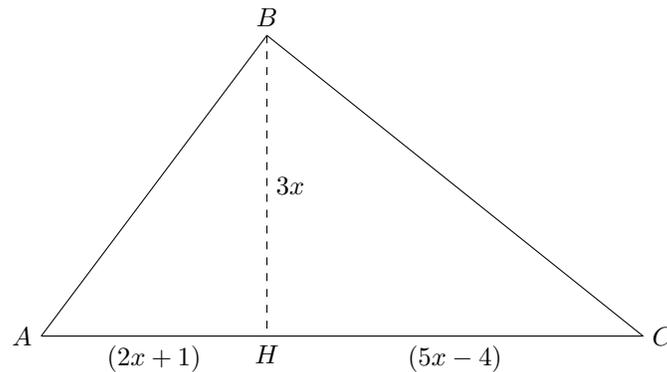
**Question 4: Nous sommes tellement pareils toi et moi**

20 %

Dans le triangle rectangle ci-dessous,  $\overline{BH}$  est une hauteur. On connaît les faits suivants :

1.  $m \overline{AH} = (2x + 1)$  cm
2.  $m \overline{HC} = (5x - 4)$  cm
3.  $m \overline{BH} = 3x$  cm

Déterminez la valeur numérique du périmètre du triangle  $ABC$  (en cm).

**Question 5: Nous sommes sûrement plus grands que moi**

20 %

Pour  $x, y \in \mathbb{R}$ , quelle est la valeur minimale de  $C = x^4 + 5x^2 + 4 - 2xy + y^2$  ?

Comme toujours, vous devez justifier votre réponse.

**Question 6: C'est bientôt terminé puisqu'ils s'en vont presque tous !**

20 %

Pour  $n \in \{2, 3, \dots, 2013\}$ , on considère les nombres de forme  $(1 - 1/n^2)$ .

Simplifier leur produit revient donc à simplifier le produit suivant :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2012^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right)$$

Effectuez cette simplification.