

Association mathématique du Québec

Concours 2012, ordre secondaire

Le 9 février 2012, de 9h00 à 12h00



Le Concours de l'Association Mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. **Les calculatrices sont interdites.**

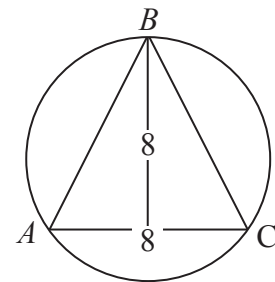
La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

1 « Un » peu plus loin

Soit R un rectangle de dimensions $a \times b$. Quels sont l'aire et le périmètre de l'ensemble des points situés à distance 1 ou moins de R (incluant R)?

2 Semblables dans la différence

Quel est le rayon du cercle circonscrit à un triangle isocèle de base 8 et de hauteur 8?



3 L'art de conjuguer

Simplifiez la somme

$$\frac{1}{\sqrt{0} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2011} + \sqrt{2012}}.$$

4 Le trois fait le mois

Alice et Bob expérimentent le jeu suivant. On commence avec 30 jetons. À tour de rôle, chaque joueur ôte du jeu 1, 2, 4, 8 ou 16 jetons (une puissance de 2). Un joueur qui ne peut rien enlever perd la partie. Alice a le choix de commencer ou non. Le devrait-elle ? Quelle est sa stratégie ?

5 Un tournoi linéaire

On organise un tournoi de bras-de-fer entre Maxime Lacasse et Hercule Lamontagne. Le tournoi comporte autant de rondes que nécessaire, le gagnant étant le premier qui parvient à gagner 2 rondes de plus que son adversaire. (Chaque ronde se termine par une victoire d'un des deux participants.) On estime que Hercule a $2/3$ des chances de gagner une ronde en particulier. Quelle est la probabilité que Hercule gagne le tournoi ?

6 Tu es mon étoile

Un dard est planté à 12 cm du centre d'une cible circulaire de 20 cm de rayon. On lance un autre dard, qui atteint la cible (chaque point de la cible a autant de chance qu'un autre d'être atteint). Quelle est la probabilité que le deuxième dard soit plus près du premier que du bord de la cible ?

7 Le facteur sifflera deux fois

Soit $f(n) = \frac{2n^2 + n - 1}{2n^2 - n - 1}$. Simplifiez le produit

$$f(2) f(3) f(4) \cdots f(99) f(100).$$