

Association mathématique du Québec

Concours 2011, ordre secondaire

Le 10 février 2011, de 9h00 à 12h00



Le Concours de l'Association Mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. **Les calculatrices sont interdites.**

La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

## 1 L'alphamétique palindromique

Otto aime tellement les palindromes (les nombres qui demeurent les mêmes lorsqu'on inverse l'ordre de leurs chiffres) qu'il a concocté l'alphamétique suivant :

$$AMQMA \times 6 = LUCIE.$$

Trouver les valeurs des huit chiffres.

(N. B. Un *alphamétique* est un petit casse-tête mathématique qui consiste en une équation où les chiffres sont remplacés par des lettres. Le résoudre consiste à trouver quelle lettre correspond à quel chiffre pour que l'équation soit vraie. Dans le problème, le même chiffre ne peut être représenté par deux lettres différentes et une lettre représente toujours le même chiffre. Bien entendu, un nombre ne doit jamais commencer par zéro. Par exemple, l'alphamétique

$$PAPA + PAPA = MAMAN$$

a pour solution  $P=7$ ,  $A=5$ ,  $M=1$  et  $N=0$ . Ainsi, en remplaçant les lettres par les chiffres, on a bien  $7575 + 7575 = 15150$ .)

## 2 Anik et le train

Anik roule toujours à 108 km/h sur l'autoroute. En se rendant à un concours de mathématique, elle dépasse un train qui longe l'autoroute et qui se dirige dans le même sens qu'elle. Elle remarque qu'elle met exactement 77 secondes à le dépasser, i.e. franchir la distance qui sépare la queue du train et sa tête. Arrivée à destination, elle réalise qu'elle a oublié sa calculatrice, alors elle rebrousse chemin. Elle recroise alors le train, qui roule à la même vitesse, et cette fois, elle met exactement sept secondes à parcourir le train de la tête à la queue. Quelle est la longueur du train?

### 3 Encore un feu rouge !

À un coin de rue, le feu de circulation reste vert pendant 30 secondes et rouge pendant 30 secondes (on suppose le temps du feu jaune inclus à même le temps du feu vert). Combien de temps perd-on, en moyenne, à attendre à ce coin de rue ? Justifier.

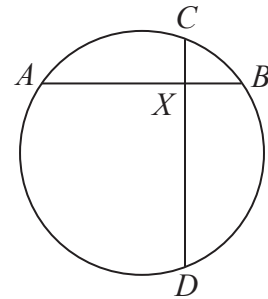
### 4 Les nombres sans sept

- Combien y a-t-il de nombres entiers entre 0 et 999 (inclusivement) dont l'écriture décimale ne contient aucun 7 ?
- Quelle est la somme de ces nombres ?

### 5 Cercle et cordes

Dans un cercle de rayon  $r$ , deux cordes  $AB$  et  $CD$  se coupent perpendiculairement en  $X$ . Montrer que

$$|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2 + |XD|^2 = 4r^2.$$



### 6 Les cubes défectifs

$173^3 = 5\,177\,717$ ,  $192^3 = 7\,077\,888$  et  $1\,309^3 = 2\,242\,946\,629$  sont trois exemples d'entiers  $N$  dont le cube compte le même nombre de chiffres différents que  $N$  lui-même. Mais existe-t-il des entiers qui contiennent plus de chiffres différents que leur cube ? Oui : le nombre 13 798 compte cinq chiffres différents tandis que son cube, 262 692 525 592, n'en compte que quatre (2, 5, 6 et 9). On dira d'un tel nombre (quand il contient plus de chiffres différents que son cube) qu'il est défectif. Montrer qu'il y a une infinité d'entiers défectifs.

### 7 Les équations tordues

Sachant que le système d'équations

$$x = \sqrt{11 - 2yz}, \quad y = \sqrt{12 - 2xz} \quad \text{et} \quad z = \sqrt{13 - 2xy}$$

possède des solutions réelles, que vaut  $x + y + z$  ?