Association mathématique du Québec

Concours secondaire

12 février 2009, 9h00 - 12h00

Le Concours de l'Association Mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Qu'un étudiant ne se décourage pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de deux ou trois questions. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. **Les calculatrices sont interdites**. Bon succès.

1. Toujours au moins une paire

On dit que deux nombres entiers sont relativement premiers si leur plus grand facteur commun est 1. Ainsi, 16 et 25 sont relativement premiers, mais 21 et 14 ne le sont pas, car 7 les divise tous les deux. Montrer que si un ensemble est constitué de 21 nombres différents choisis parmi les entiers de 1 à 40, alors au moins deux d'entre eux seront relativement premiers.

2. Toujours les mêmes chiffres!

Il existe un nombre remarquable de trois chiffres différents dont le carré s'écrit avec deux de ses trois chiffres. Si ce nombre s'écrit ***ABC*** (attention, ici ***ABC*** n'est pas le produit des trois chiffres, mais simplement l'écriture en base dix de ce nombre), alors son carré s'écrit ***CCAAC***. Trouvez ce nombre.

3. Le nombre (presque) toujours composé.

Sauf pour $n = 1$, le tableau suivant montre des factorisations de n^4+4. Montrer que le seul cas où la puissance quatrième d'un nombre plus 4 est un nombre premier est 5.

n	n^4+4	Une factorisation possible
1	5	
2	20	2 x 10
3	85	5 x 17
4	260	10 x 26
5	629	17 x 37
6	1300	26 x 50
7	2405	37 x 65
8	4100	50 x 82
9	6565	65 x 101

4. La migraine de Philippe

Quand Philippe a la migraine, il étudie des suites compliquées. Hier, il a défini la suite suivante :

$$f(0) = 6$$
$$f(n+1) = (5f(n)+n)/5$$

Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles $f(n)$ se trouve entre 100 et 200.

5. Le duel

Six verres de whisky sont disposés sur un comptoir de bar. Deux des verres contiennent un poison violent indétectable. Deux cowboys se livrent à un duel en procédant comme suit : Le premier cowboy choisit un verre au hasard et le boit. Si le premier survit, le second cowboy saisit à son tour un verre au hasard et le boit. Si le second cowboy survit, le premier choisit un nouveau verre et le boit, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un cowboy tombe.
Quelle est la probabilité pour le premier cowboy de gagner le duel?

6. La suite

Dans une certaine suite de m nombres réels, on a que la somme de trois nombres consécutifs est toujours négative (c.-à-d. strictement inférieure à 0) tandis que la somme de cinq nombres consécutifs est toujours positive (c.-à-d. strictement supérieure à 0).

a) Quelle est la plus grande valeur possible pour m?

b) Construire une telle suite de longueur m.

Solutionnaire

N.B. Il y a plusieurs réponses possibles. Certaines réponses données par les élèves étaient d'une grande originalité.

Question 1 :
Dans n'importe quel ensemble de 21 nombres, il y aura au moins deux nombres consécutifs et deux nombres consécutifs sont toujours relativement premiers.

Question 2 :
On doit trouver les trois chiffres différents A, B et C de sorte que ABC^2 = CCAAC.
On a A=1, 2 ou 3, car autrement le carré de ABC aurait six chiffres.
De plus, C=0,1, 5 ou 6, car ce sont les seuls chiffres qui, mis au carré, donnent un résultat se terminant par le même chiffre.
C=0 est à éliminer, car son carré devrait se terminer par deux 0, ce qui n'est pas le cas ici.
C=1 entraîne que le carré est au plus 11991, et puisqu'alors on aurait A au moins égal à 2, donc N au moins égal à 201, dont le carré est 40401, ce qui n'est pas possible (car C=1).
C=6 entraîne que le carré est entre 66116 et 66996. Or, $257^2 = 66049 < 66116 < N^2 < 66996 < 67081 = 259^2$ et donc C ne peut être égal à 6.
Il reste le cas C=5. On a alors que N^2 est entre 55115 et 55995, ce qui donne N=235, dont le carré est 55225.
Réponse : 235 x 235 = 55225.

Question 3 :
Il fallait trouver une factorisation de n^4+4. En regardant la 3^e colonne du tableau, on trouvait que la suite des premiers nombres de la factorisation (2, 5, 10, 17, 26, …) était la suite des carrés parfaits + 1. On pouvait généraliser et trouver le terme général $(n-1)^2 + 1$. De la même manière, on trouve le terme général de la suite des deuxièmes nombres de la factorisation (10, 17, 26, 37, …) : $(n+1)^2 + 1$. On vérifie aisément que $((n-1)^2 + 1)((n+1)^2 + 1) = (n^2-2n+2)(n^2+2n+2) = n^4+4$.
Ce nombre est donc toujours composé, sauf pour n=1.

Question 4 :

$$f(n+1) = \frac{(5f(n)+n)}{5} = f(n) + \frac{n}{5}$$

Donc $f(n) = f(n-1) + \frac{n-1}{5} = \frac{n-1}{5} + f(n-1) = \frac{n-1}{5} + \frac{n-2}{5} + f(n-2) = \frac{n-1}{5} + \frac{n-2}{5} + \frac{n-3}{5} + f(n-3)$

$$= \frac{n-1}{5} + \frac{n-2}{5} + \frac{n-3}{5} + \frac{n-4}{5} + f(n-4) = \frac{1}{5}\big((n-1)+(n-2)+...+3+2+1\big) + f(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{5}\right) + 6$$

On cherche $100 \le f(n) \le 200$ i.e. $100 \le \frac{n(n-1)}{10} + 6 \le 200$ i.e. $94 \le \frac{n(n-1)}{10} \le 194$

i.e. $940 \le n(n-1) \le 1940$

On conclut que n = 32, 33, ..., 43, 44.

Question 5 :

Le premier cowboy a une probabilité de $\frac{1}{3}$ de tomber dès le premier verre.

Le 2e cowboy a une probabilité de $\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$ (survie du premier cowboy et choix d'un verre empoisonné) de tomber au 2e verre. Le 1er cowboy a une probabilité de $\left(1-\frac{1}{3}-\frac{4}{15}\right)\times\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$ de tomber au 3e verre (survie aux 2 premiers verres et choix du poison au 3e). Le 2e cowboy a alors une probabilité de $\left(1-\frac{1}{3}-\frac{4}{15}-\frac{1}{5}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$ de succomber au 4e verre. Si le 2e cowboy survit à ce 4e verre, alors le premier cowboy sera certain de succomber au 5e. Cela surviendra avec une probabilité de $\left(1-\frac{1}{3}-\frac{4}{15}-\frac{1}{5}-\frac{2}{15}\right)\times\frac{2}{2}=\frac{1}{15}$.

En tout, le premier cowboy a une probabilité de $\frac{3}{5}$ de mourir ($\frac{1}{3}$ au premier verre, $\frac{1}{5}$ au deuxième et $\frac{1}{15}$ au troisième), et donc une probabilité de $\frac{2}{5}$ de gagner le duel.

Question 6 :

Montrons que la suite doit contenir moins de sept nombres. En effet, supposons que a1, a2, a3, ...a7 soit une suite de sept nombres possédant les deux propriétés.
Disposons les nombres en rectangle comme suit :

a1	a2	a3	a4	a5
a2	a3	a4	a5	a6
a3	a4	a5	a6	a7

Si les deux propriétés sont remplies par la suite, la somme de tous les nombres du tableau selon les colonnes devrait être négative, tandis que la somme de tous les nombres du tableau selon les lignes devrait être positive. Donc, la somme de tous les nombres du rectangle devrait être à la fois négative et positive, selon qu'on les additionne selon les colonnes ou les lignes, ce qui n'est pas possible. On a donc au plus six éléments dans la suite.
On peut construire une telle suite de six éléments qui satisfait aux deux propriétés :
-3, 5, -3, -3, 5, -3.

Réponses : i) : La valeur maximale de m est 6. ii) -3, 5, -3, -3, 5, -3