CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

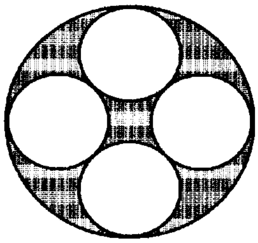
Ordre secondaire

Le 7 février 2008, de 14h00 à 17h00

Les calculatrices électroniques sont autorisées

Le concours de l'Association mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Le questionnaire est varié: plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de trois ou quatre questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Bonne chance !

1. Les quatre petits cercles dans un grand



Quatre cercles de rayon 1 sont tangents l'un à l'autre et à un grand cercle qui les contient, comme dans la figure ci-contre. Calculer l'aire de la région ombrée, à l'intérieur du grand cercle mais hors des petits cercles.

2. Les pourboires au restaurant

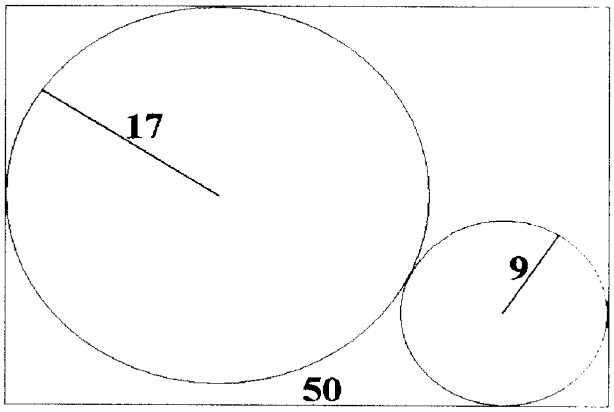
Bernard et Claire ont dîné au restaurant. Les mets que Bernard a choisis dans le menu coûtaient au total deux fois plus cher que ceux que Claire a choisis.

Ce jour-là la taxe fédérale, TPS, était de 6 %. La taxe provinciale, TVQ, était de 7,5 % et portait sur le coût des produits et services, augmenté de la taxe fédérale.

Bernard a aimé son repas, mais il n'était pas content du service. Il a décidé de donner un pourboire de seulement 10 % du coût de son repas, incluant les taxes. De son côté, Claire donne 20 % du coût de son repas, mais sans compter les taxes.

Bernard et Claire ont dépensé ensemble $ 121.16 pour leur dîner. Combien coûtait le repas de Claire selon le menu ?

3. Les cercles dans un rectangle



Deux cercles de rayons de 9 cm et de 17 cm sont contenus dans un rectangle dont un des côtés est de 50 cm. Les deux cercles sont tangents l'un à l'autre et touchent à deux côtés adjacents du rectangle, comme dans la figure. Calculer l'aire du rectangle.

4. Les différences de deux carrés

Le nombre 51 peut être exprimé de deux façons comme la différence des carrés de deux entiers:

$$10^2 - 7^2 = 100 - 49 = 51$$

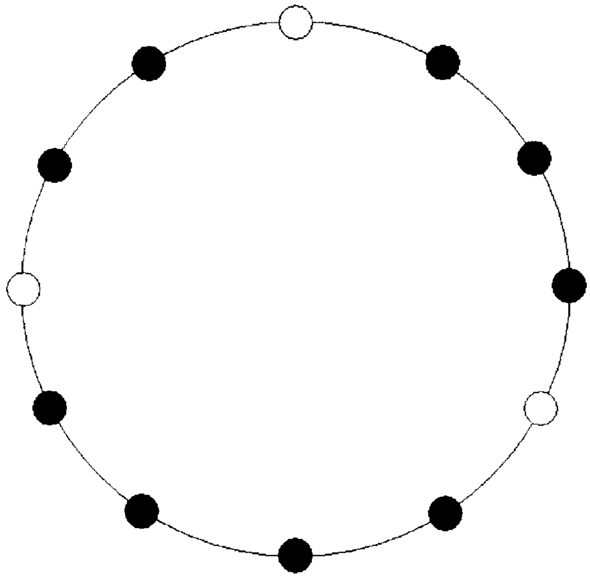
et

$$26^2 - 25^2 = 676 - 625 = 51.$$

4,1 Trouver (cinq points) toutes les façons d'exprimer le nombre 45 comme différence des carrés de deux entiers.

4,2 Trouver (cinq points) tous les entiers qui ne peuvent pas être exprimés comme différence des carrés de deux entiers.

5. Les colliers de douze perles



Combien de colliers différents peut-on former avec douze perles, dont trois sont blanches et les neuf autres sont noires ?

6. Le livreur de pizza.

Giuseppe Pizza se vante de sa ponctualité. Si son livreur sonne à votre porte après l'heure convenue, votre pizza est gratuite !

Notre ami Marcel a commandé une grande pizza pour le souper de sa famille. L'heure convenue, 19:00, approche. Il se demande si sa pizza sera gratuite. Il s'installe devant sa grande horloge pour observer les aiguilles. Chaque minute est indiquée par un point bien visible.

Au moment où tinte la sonnerie de la porte, Marcel note que l'aiguille des heures est exactement devant un des points et que l'aiguille des minutes est exactement quatorze points plus loin.

Quelle heure est-il ?

7. Le procédé de Kaprekar

On considère un entier quelconque à trois chiffres qui n'est pas un multiple de 111, disons 172.

Le procédé de Kaprekar consiste à changer deux fois l'ordre des chiffres d'un entier pour les mettre d'abord en ordre décroissant, puis en ordre croissant; on calcule ensuite la différence des deux entiers ainsi obtenus.

Dans notre exemple, avec 172, on obtient

$$721 - 127 = 594.$$

Le procédé de Kaprekar appliqué à 594 donne

$$954 - 459 = 495.$$

Cet entier, 495, reste inchangé si on lui applique le procédé de Kaprekar. C'est pourquoi on l'appelle la *constante de Kaprekar* pour les entiers à trois chiffres.

Le procédé s'applique même aux entiers à moins de trois chiffres. Il suffit de les faire précéder d'un ou deux zéros. Ainsi le procédé de Kaprekar appliqué à l'entier 7 donne

$$700 - 007 = 693,$$

puis

$$963 - 369 = 594$$

et enfin

$$954 - 459 = 495.$$

Ainsi l'entier 172 nécessite deux applications du procédé de Kaprekar pour être transformé dans la constante de Kaprekar, tandis que l'entier 7 en exige trois.

Trouver le nombre maximal d'applications du procédé de Kaprekar nécessaire pour transformer dans la constante de Kaprekar un entier quelconque à trois chiffres qui n'est pas un multiple de 111.