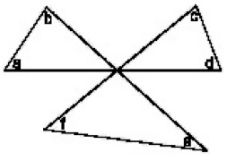
Association Mathématique du Québec

Concours de l'Association Mathématique du Québec 2007
Ordre secondaire

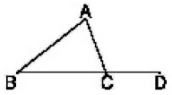
1. Les trois triangles

Trois droites concourantes sont jointes pour former trois triangles, comme dans la figure ci-contre. Calculer la somme des angles a, b, c, d, e et f.



Solution

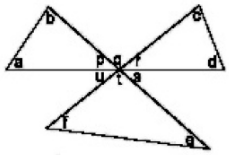
Dans tout triangle, un angle extérieur comme l'angle ACD de la figure ci-contre, est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents: $\triangle ACD = \triangle A + \triangle B$.



Nommons p, q, r, s, t et u les angles qui entourent le sommet commun aux trois triangles. On a alors

$\triangle a + \triangle b = \triangle q + \triangle r$,
$\triangle c + \triangle d = \triangle s + \triangle t$,
$\triangle e + \triangle f = \triangle u + \triangle p$.

Ainsi la somme des angles a, b, c, d, e et f est égale à la somme des angles p, q, r, s, t et u, qui est de 360°.



2. Les deux polygones réguliers

Deux polygones réguliers ont un total de dix-sept sommets et de cinquante-trois diagonales. Calculer le nombre des sommets de chacun des deux polygones.

Solution

Soient x et y les nombres de sommets des deux polygones réguliers. Alors

(1) $x + y = 17$.

Dans un polygone à x côtés, chaque sommet est relié par des diagonales à $x - 3$ autres sommets. Comme chaque diagonale a deux extrémités qui sont des sommets, le nombre des diagonales est

(2) $$\frac{x(x-3)}{2}.$$

On obtient l'équation

$$\frac{x(x-3)}{2} + \frac{y(y-3)}{2} = 53$$

Grâce à (1), on peut remplacer y par $17-x$ dans (2). Après quelques manipulations, on obtient l'équation

$$x^2 - 17x + 66 = 0,$$

dont les racines sont 6 et 11.

3. L'abdomen de Jean

Après un bon repas, l'abdomen de Jean a pris de l'expansion. Comme Jean est mathématicien, il s'amuse, en sirotant son digestif, à résoudre l'alphamétique

$$\text{JEAN} \times \text{JEAN} = \text{ABDOMEN}.$$

Il constate avec ravissement que JEAN correspond à son année de naissance ! Quelle était cette année bénie ?

(Résoudre un alphamétique signifie associer différents chiffres de 0 à 9 aux différentes lettres de sorte que l'équation formée par les nombres induits par les lettres correspondantes soit vraie. Par exemple, A=2, S=4, R=5, O=7 et I=6 est une solution de AS × AS = ROI, puisque 24 × 24 = 576)

Solution

On note d'abord que ABDOMEN n'a que sept chiffres, tous différents. Comme $3200^2 = 10\,240\,000$, un nombre à huit chiffres, on sait que J, qui n'est pas zéro, ne peut être que 1 ou 2 si E est supérieur à 1 et peut être 3 si E est 0 ou 1.

Comme JEAN et ABDOMEN se terminent par le même chiffre, N ne peut être que 0, 1, 5 ou 6. Si N = 0, alors JEAN^2 se termine par deux zéro. Donc $N \neq 0$.

Considérons le cas où N = 1 et A prend diverses valeurs. Si A = 0, alors JEAN est un nombre de la forme 100 x + 1 et on a

$$(100x+1)^2 = 10\,000x^2 + 200x + 1,$$

de sorte que E = 0 = A et ce cas est à exclure. Si A = 2, alors il ne reste plus de valeur à donner à J. Si A = 3, alors JEAN est un nombre de la forme 100 x + 31 et on a

$$(100x+31)^2 = 10\,000x^2 + 6200x + 961,$$

E = 6 et J ne peut être que 2. Mais

$$2631^2 = 6\,922\,161,$$

où des chiffre sont répétés . Le tableau suivant donne les résultats de cette méthode quand A prend les valeurs 3, 4, ..., 9.

A	E	J	JEAN	JEAN^2
3	6	2	2631	6 922 161
4	8	2	2841	8 071 281
5	0	2	2051	4 206 601
6	2	2	Exclu	
7	4	2	2471	6 610 041
8	6	2	2681	7 187 761
9	8	2	2891	8 357 881

Tous les nombres de la dernière colonne comportent des répétitions de chiffres. Donc $N \neq 1$.

Dans le cas où N = 5, JEAN est de la forme 10+5 et on a

$$(10x+5)^2 = 100x^2 + 100x + 25,$$

de sorte que E = 2, dans ABDOMEN, et J = 1. Le tableau suivant donne les résultats pour les diverses valeurs de A.

A	E	J	JEAN	JEAN^2
3	2	1	1325	1 755 625
4	2	1	1425	2 030 625
5	2	1	Exclu	
6	2	1	1625	2 640 625
7	2	1	1725	2 975 625
8	2	1	1825	3 330 625
9	2	1	1925	3 705 625

Encore ici, tous les nombres de la dernière colonne comportent des répétitions de chiffres.

Considérons le cas où N = 6 et A prend diverses valeurs. Si A = 0, alors JEAN est un nombre de la forme 100 x + 6 et on a

$$(100x+6)^2 = 10\,000x^2 + 1200x + 36,$$

de sorte que E = 3. Ainsi J peut prendre les valeurs 1 et 2 et JEAN est 1306 ou 2306. Le tableau suivant donne les résultats de cette méthode quand A prend les valeurs 3, 4, ..., 9.

A	E	J	JEAN	JEAN^2
0	3	1	1306	1 705 636
0	3	2	2306	5 317 636
1	5	2	2516	6 330 256
2	7	1	1726	2 979 076
3	**9**	**1**	**1936**	**3 748 096**
3	9	2	2936	8 620 096
4	1	2	2146	4 605 316
4	1	3	3146	9 897 316
5	3	1	1356	1 838 736
5	3	2	2356	5 550 736
7	7		Exclu	
8	9	1	1986	3 944 196
8	9	2	2986	8 916 196
9	1	2	2196	4 822 416
9	1	3	3196	10 214 416

Une seule bonne réponse: 1936, et son carré: 3 748 096. Tous les autres nombres de la dernière colonne comportent des répétitions de chiffres. Donc Jean est né en 1936.

4. Des chiffres 1 dans le cube

Le cube de 345 est

$$345^3 = 345 \times 345 \times 345 = 41\,063\,625,$$

un nombre qui se termine par 625.

Trouver le plus petit nombre dont le cube se termine par 111.

Solution

Dans le tableau ci-dessous, la colonne A contient les nombres 0 à 9. La colonne B donne le dernier chiffre du cube d'un nombre qui se termine par le chiffre de la colonne A.

A	B	C	D	E	F
0	0	01	01	071	911
1	**1**	11	31	171	211
2	8	21	61	271	511
3	7	31	91	271	811
4	4	41	21	471	**111**
5	5	51	51	571	411
6	6	61	81	671	711
7	3	71	**11**	771	011
8	2	81	41	871	311
9	9	91	71	971	611

À l'examen des colonnes A et B on constate que le dernier chiffre d'un nombre dont le cube se termine par 1ne peut être que 1.

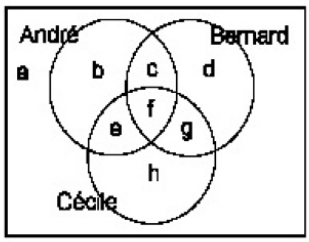
La colonne C donne toutes les possibilités pour les deux derniers chiffres d'un nombre qui se termine par 1. La colonne D donne les deux derniers chiffres du cube d'un nombre qui se termine par les deux chiffres de la colonne C. À l'examen des colonnes C et D on constate que les deux derniers chiffres d'un nombre dont le cube se termine par 11 se termine lui-même par 71.

La colonne E donne toutes les possibilités pour les trois derniers chiffres d'un nombre qui se termine par 71. La colonne F donne les trois derniers chiffres du cube d'un nombre qui se termine par les trois chiffres de la colonne E. À l'examen des colonnes E et F on constate que les trois derniers chiffres d'un nombre dont le cube se termine par 111 se termine lui-même par 471, qui est le nombre cherché.

5. Les problèmes faciles

André, Bernard et Cécile s'amusaient à résoudre des problèmes de géométrie. André en a résolu 65, Bernard 75 et Cécile 80. À eux trois, ils en ont résolu en tout 120.

Appelons *facile* un problème qu'ils ont tous résolu et *difficile* celui qu'un seul des trois a résolu. Combien de problèmes faciles y avait-il de moins que de problèmes difficiles ?



Solution

Définissons les variables a, b, ..., h à l'aide du diagramme de Venn ci-contre. Alors les données du problème se résument dans les

équations suivantes.

(1) $b + c + d + e + f + g + h = 120$,
(2) $b + c + e + f = 65$,
(3) $c + d + f + g = 75$,
(4) $e + f + g + h = 80$.

Si on soustrait le double de l'équation (1) de la somme des équations (2), (3) et (4), on obtient

$$(b + c + e + f) + (c + d + f + g) + (e + f + g + h) - 2(b + c + d + e + f + g + h) = f - b - d - h = 2(120) - 65 - 75 - 80 = 20,$$

le nombre cherché.

6. Division par 9

Calculer le reste de la division de 8^{2007} par 9. Répéter ce calcul pour 8^{2008}.

Solution

Écrivons 8 sous la forme $8 = 9-1$.

Si on multiplie par 8 un nombre de la forme $9k-1$, on obtient

$$(9k-1) \times (9-1) = 81k - 9k - 9 + 1,$$

un nombre de la forme $9m+1$. Si on multiplie par 8 un nombre de la forme $9h+1$, on obtient

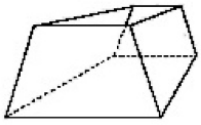
$$(9h+1) \times (9-1) = 81h - 9h + 9 - 1,$$

un nombre de la forme $9n-1$.

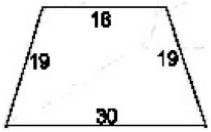
Ainsi les puissances paires de 8 sont de la forme $9k+1$ et les puissances impaires sont de la forme $9h-1$.

Donc le reste de la division de 8^{2007} par 9 est 8 et celui de la division de 8^{2008} par 9 est 1.

7. Le fabricant d'abat-jours

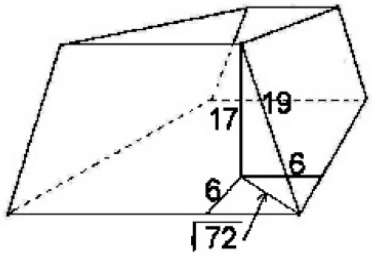


Monsieur A. Bajour fabrique des abat-jours ayant la forme d'une pyramide tronquée à base carrée (voir la première figure). Les trapèzes isocèles formant la surface de ses abat-jours ont les dimensions, en cm, données dans la seconde figure. Chaque abat-jour doit être expédié dans une boîte ayant la forme d'un prisme droit à base carrée qui soit la plus petite possible. Quelle est l'aire totale d'une telle boîte ? *Note*: la pyramide doit être déposée dans la boîte de façon à ce que sa base touche le fond de la boîte.



Solution

On considère la projection d'un sommet du carré supérieur de l'abat-jour sur la base. Cette projection est à 6 cm des côtés du carré de base. Par le théorème de Pythagore, on trouve que le point est à $\sqrt{72}$ cm du sommet et, de nouveau par Pythagore, on trouve que la hauteur de l'abat-jour est de 17 cm.



La plus petite boîte contenant l'abat-jour aura donc une base carrée de 30 cm de côté et sa hauteur sera de 17 cm. Son aire sera

$$(2 \times 30^2) + (4 \times 17 \times 30) = 3\,840 \text{ cm}^2.$$

Résultats du concours 2007 – Ordre secondaire		
Rang	**Nom**	**Institution**
1er	GARCEAU, Daniel	Cité étudiante de la Haute-Gatineau, Maniwaki
	JU, Hong Fei	École secondaire Louis-Riel, Montréal
3e	BESSISSOW, Saleh,	École secondaire St-Jean-Baptiste, Longueuil
	MARTIN, Renée-Anne	Académie Antoine-Manseau, Joliette
	VIZCARDO-LAZO, Giovanni	École secondaire St-Jean-Baptiste, Longueuil
6e	JOSEPH, Kervin	Collège Beaubois, Pierrefonds
	MAILLE, Hélène	Académie Antoine-Manseau, Joliette
	ZHANG, Jing Yu	Collège Jésus-Marie de Sillery, Sillery
9e	FOURNIER, Charles	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
	LIN, Erik	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
11e	GRENIER, Isabelle	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
	LVOV, Nikita	Étudiant d'une école anglophone
	POLOTSKII, Ilia	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	ROY, Louis-Philippe	École Le Mistral, Mont-Joli
	THOMA, Lars	Collège Mont-Saint-Louis, Montréal
16e	TRUCHON, Léonard	Séminaire des Pères Maristes, Sillery
17e	LAROCHE, Guillaume	École secondaire Sophie-Barat, Montréal
18e	PHAM-AN, Mila	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
19e	MI XIAO, Cheng	École secondaire Louis-Riel, Montréal
	THELLEND-GAUTHIER, Gilbert	Collège Beaubois, Pierrefonds
21e	LARIVIÈRE CHARTIER, Julien	École secondaire Saint-Joseph, St-Hyacinthe
	MADIGYAN, Garabed	Collège Beaubois, Pierrefonds
	PHÉLIPPÉ, Yannic	Collège Beaubois, Pierrefonds
24e	DUFRESNE, Rémi	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
25e	AL KELLESLI, Mohamad Karim	École secondaire Mont-Royal, Ville Mont-Royal
	BÉDARD, Mylène	Commission Scolaire des Navigateurs, Lévis
	BOUCHER, Stéphanie	Collège Jésus-Marie de Sillery, Sillery
	MARTINEAU, Olivier	École secondaire d'Iberville, Rouyn-Noranda
29e	BERGERON, Maxime	École secondaire de la Rive, Bois-des-Filions
30e	BESNER, Renaud	Collège Beaubois, Pierrefonds
	CROTEAU, Agnès	École secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux
	MARCOTTE, Gabriel	Collège Beaubois, Pierrefonds
	MORIN, Nathanaël	École secondaire St-Jean-Baptiste, Longueuil
	SIMARD, Marie-Soleil	Académie les Estacades, Trois-Rivières
	YANG, Meng	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal