Concours de l'Association mathématique du Québec 2004
Ordre secondaire

Le concours de l'Association mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Pour permettre à ces grands talents de se détacher nettement des autres étudiants, le questionnaire est abondant et varié : plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage donc pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de trois ou quatre questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Bonne chance !

1. Les vases d'eau salée

Deux vases, A et B, d'une capacité de six litres chacun, contiennent chacun quatre litres d'eau salée, selon les concentrations suivantes : A contient 5 % de sel et B contient 10 % de sel. On vide un litre d'eau salée du vase A dans le vase B puis on mélange. On vide ensuite un litre du vase B dans le vase A, puis on mélange à nouveau. Quelle concentration de sel (en pourcentage) chacun des vases A et B contiennent-ils maintenant ?

Solution

Il suffit de mesurer le volume (en litres) de sel dans chaque vase, en tenant compte aussi du volume d'eau salée, après chaque transfert.

	Eau salée, vase A	Sel, vase A	Eau salée, vase B	Sel, vase B
Début	4	$\frac{1}{5}$	4	$\frac{2}{5}$
Transfert 1	3	$\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{20}$	5	$\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$
Transfert 2	4	$\frac{3}{20}+\frac{1}{5}\times\frac{9}{20}=\frac{6}{25}$	4	$\frac{9}{20}-\frac{1}{5}\times\frac{9}{20}=\frac{9}{25}$

Concentration finale :

$$\text{vase A} := \frac{6}{25}\times\frac{100\%}{4} = 6\%,$$

$$\text{vase B} := \frac{9}{25}\times\frac{100\%}{4} = 9\%.$$

2. La multiplication de Koallo

Koallo habite le joli village d'Oloko, au Nigéria. Comme il aime les mathématiques, il a remarqué récemment, qu'avec une correspondance appropriée entre les chiffres et les lettres et en multipliant par 11 le nom de son village, il obtenait son nom ! Êtes-vous capable de faire comme lui ?

Plus précisément, pouvez-vous trouver les chiffres différents que doivent représenter les lettres O, L, K et A pour que l'équation

$$\mathbf{OLOKO} \times 11 = \mathbf{KOALLO}$$

soit vraie ?

Attention, OLOKO doit être vu comme un nombre de cinq chiffres et non comme le produit $O\times L\times O\times K\times O$. Il en va de même pour KOALLO.

Solution

En effectuant la multiplication de la façon usuelle, on peut écrire :

$$\begin{array}{cccccc} & O & L & O & K & O \\ + & O & L & O & K & O \\ \hline K & O & A & L & L & O \end{array}$$

On désignera les rangs des colonnes en commençant par la droite. La 6^{e} colonne nous apprend que $\mathbf{K} = \mathbf{O} + 1$ et que la 5^{e} colonne génère une retenue. Sachant cela et examinant la 5^{e} colonne, on déduit que

L = 9 et que la 4e colonne génère une retenue et donc que **O** = **A** + 1. On a donc que les nombres **A**, **O** et **K** sont consécutifs.

Puisque **L** = 9, les 2e et 3e colonnes ne génèrent pas de retenues et on a **K** + **O** = 9. Cela nous donne **K** = 5, **O** = 4 et alors **A** = 3.

En somme, **OLOKO** × **11** = **KOALLO** est équivalent à **49 454** × **11** = **543 994**, seule solution possible.

3. Les nombres de Fibonacci dans des triangles de Pythagore

La suite: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... est la célèbre **suite de Fibonacci**. On voit que si on commence avec 1 et 2, les termes qui suivent sont toujours obtenus comme la somme des deux nombres précédents de la suite. Ainsi, on a 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2, 8 = 5 + 3 .... Un **triangle de Pythagore** est, quant à lui, un triangle rectangle dont la longueur de chacun des côtés est un nombre entier. On remarque alors que si nous prenons quatre termes consécutifs de la suite de Fibonacci, quelques opérations simples nous permettent de former des triangles de Pythagore. Par exemple, soit les quatre nombres 3, 5, 8 et 13, alors un premier côté x du triangle est obtenu en prenant deux fois le produit des deux nombres du milieu ($x = 2\times 5\times = 80$), le deuxième côté y est obtenu en multipliant le premier et le dernier des quatre nombres ($x = 3\times 13 = 39$) et le dernier côté z est égal à la somme des carrés des deux nombres du milieu ($z = 5^2 + 8^2 = 89$). Ainsi, on a bien obtenu un triangle de Phythagore car on a $80^2 + 39^2 = 89^2$.

a) Vérifiez que cela marche aussi si on prend les quatre nombres 2, 3, 5 et 8.

b) Pouvez-vous montrer que cela marche tout le temps ? Plus précisément, si a, b, c et d désignent quatre nombres consécutifs de la suite de Fibonacci et que l'on pose $x = 2bc$, $y = ad$, et $z = b^2 + c^2$, montrer que x, y et z forment les côtés entiers d'un triangle rectangle.

Solution

Si a, b, c et d sont les éléments consécutifs de la suite de Fibonacci, alors $c = a + b$ et $d = b + c$. Donc, $y = ad = (c - b)(c + b) = c^2 - b^2$.

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2bc)^2 + (c^2 - b^2)^2 \\ &= 4b^2c^2 + c^4 - 2b^2c^2 + d^4 \\ &= c^4 + 2b^2c^2 + d^4 \\ &= (c^2 + b^2)^2 \\ &= z^2 \end{aligned}$$

ce qui est la relation de Pythagore, et donc x, y et z sont les trois côtés d'un triangle rectangle, ce qu'on voulait démontrer.

4. Que de chiffres !

Trouvez le nombre de chiffres et la somme des chiffres de l'entier $16^8 \times 5^{30}$.

Solution

$16^8 \times 5^{30} = (2^4)^8 \times 5^{30} = 2^{32} \times 5^{30} = 2^2(2\times 5)^{30}$
$= 400000000000000000000000000000000$,
i.e. 4 suivi de trente zéros ! Il y a donc trente-et-un chiffres et leur somme est... 4 !

5. Et hop ... sans calculatrice !

Expliquer pourquoi l'égalité suivante est vraie.

$$\frac{2004^2}{2003\times 2005} + \frac{2005^2}{2004\times 2006} + \frac{2006^2}{2005\times 2007} + \ldots + \frac{3004^2}{3003\times 3005}$$

$$= 1001 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{3004} - \frac{1}{3005}\right).$$

Solution

Examinons l'expression $\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. On a

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

En faisant prendre à n les 1001 valeurs successives 2003, 2004, ... 3003 et en additionnant, on obtient :

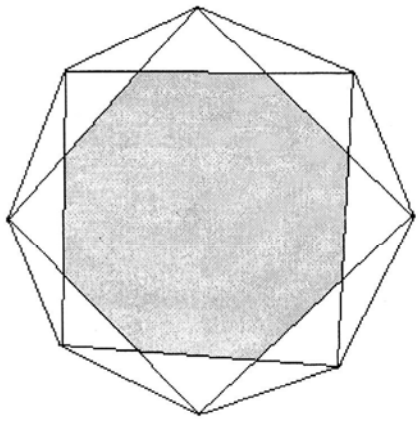
$$\frac{2004^2}{2003\times 2005} + \frac{2005^2}{2004\times 2006} + \frac{2006^2}{2005\times 2007} + \ldots + \frac{3004^2}{3003\times 3005} =$$

$$1001 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005}\right) + \left(\frac{1}{2004} - \frac{1}{2006}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3002} - \frac{1}{3004}\right) + \left(\frac{1}{3003} - \frac{1}{3005}\right)\right)$$

$$= 1001 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{3004} - \frac{1}{3005}\right)$$

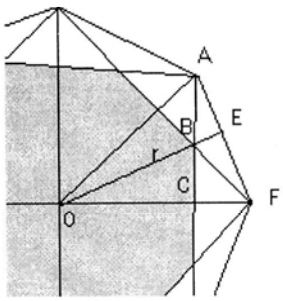
6. L'octogone

Si on relie entre eux les sommets d'un octogone régulier qui ont un sommet voisin en commun, on obtient au centre de la figure un nouvel octogone régulier, décalé et plus petit que le premier (en gris sur le dessin). Si l'aire de l'octogone initial est 1, quelle est l'aire du nouvel octogone ?



Indice : lorsque deux figures sont semblables, le rapport de leurs aires est égal au carré du rapport de leurs côtés homologues.

Solution



Complétons une partie du dessin comme sur la figure ci-contre.

Le rapport des aires entre le grand octogone et le petit (le gris) est donné par $\left(\frac{OA}{r}\right)^2$, où r = OB.

Afin de simplifier, posons pour l'instant $OA = 1$, même si c'est incompatible avec le fait que l'aire totale soit égale à un (car nous ajusterons après et ce qui compte est le rapport entre les valeurs). L'angle $\angle$AOF vaut 45° puisque la figure est un octogone régulier. Il en va donc de même pour les angles $\angle$BFC et $\angle$FBC puisque AC est perpendiculaire à OF. Donc BC = FC, étant les deux côtés égaux d'un triangle isocèle. Les triangles OBC et AFC sont donc congrus par ACA. Donc r = AF. Or, d'après le théorème de Pythagore, on a $AF^2 = CF^2 + AC^2$. Mais puisque ACO est un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse 1, on a, toujours en vertu du théorème de Pythagore, $ac = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

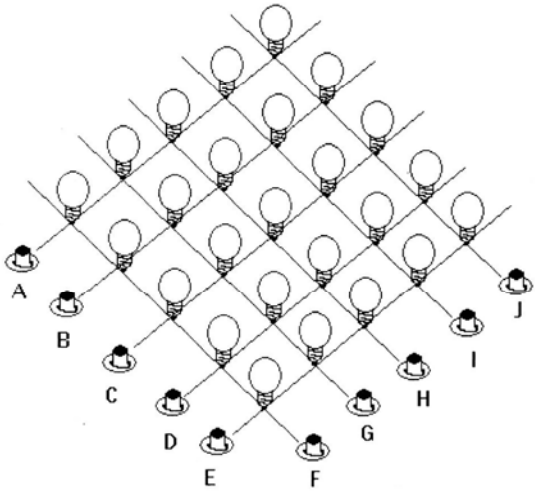
Puisque $CF = 1 - OC = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, on peut maintenant conclure

$$r^2 = AF^2 = CF^2 + AC^2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 - \sqrt{2} = .585786\ldots$$

ce qui est l'aire du petit octogone.

7. Les ampoules de Raoul

Raoul se confectionne un circuit électrique formé de vingt-cinq ampoules disposées en carrés et de dix interrupteurs, notés de A à J, comme sur le dessin.



S'il appuie sur un interrupteur, alors les cinq ampoules situées sur la ligne de cet interrupteur voient leur état inversé : celles qui sont allumées s'éteignent tandis que celles qui sont éteintes s'allument.

a) Montrer que, quelque soit l'état initial (certaines ampoules peuvent être allumées tandis que d'autres, non) des ampoules, il est toujours possible de manipuler les interrupteurs de telle sorte que, dans chacune des dix rangées correspondantes, il y ait toujours plus d'ampoules allumées qu'éteintes.

les en même temps ? Que votre réponse soit oui ou non, il faut donner la preuve de ce que vous avancez.

Solution

a) Si une rangée contient plus d'ampoules éteintes qu'allumées, alors en appuyant sur l'interrupteur correspondant, on se trouve à augmenter le nombre total d'ampoules allumées dans le circuit. Comme il n'y a que 25 ampoules, il viendra nécessairement un temps où on aura atteint le nombre maximal d'ampoules allumées possible, et donc toutes les rangées contiendront plus d'ampoules allumées qu'éteintes !

c) La réponse est non. Comme la question est un peu complexe, nous donnerons trois solutions possibles.

Solution 1 : il est clair que l'ordre dans lequel on appuie sur les interrupteurs n'importe pas. Par conséquent, s'il existe une solution, il n'y a pas besoin d'appuyer sur un interrupteur donné plus d'une fois, car le fait d'appuyer deux fois sur un interrupteur annule l'effet et ramène à la position qui prévalait avant d'appuyer.

Maintenant, supposons qu'initialement, toutes les ampoules soient allumées sauf l'ampoule du centre, intersection des rangées C et H. Notre but est d'appuyer sur certains interrupteurs de sorte qu'à la fin, toutes les ampoules soient allumées. Clairement, il faudra appuyer sur C ou H, mais pas sur les deux. Comme la situation est symétrique, on peut supposer qu'on appuie sur C. Cela aura pour effet d'allumer l'ampoule du centre mais d'éteindre les quatre autres ampoules sur la ligne C. Pour les rallumer, on devra nécessairement appuyer sur F, G, I et J. Cela éteindra, par exemple, l'ampoule à l'intersection de A et F. Il faut la rallumer en appuyant sur A. Cela éteint l'ampoule à l'intersection de A et H. Pour la rallumer, il faudrait appuyer sur H, mais cela nous est interdit car cela éteindrait l'ampoule du centre !

Solution 2 : partant du fait mentionné dans la solution précédente que l'ordre dans lequel on appuie n'importe pas et qu'on n'appuie qu'une fois ou pas du tout sur chacun des interrupteurs, il y a au plus 2^{10} façon d'appuyer (en fait, il y en a exactement 2^9 puisque le fait d'appuyer sur tous les interrupteurs sauf un est équivalent à appuyer sur l'interrupteur oublié). De plus, chaque modification faite est inversible, car il suffit d'appuyer à nouveau sur les mêmes touches pour revenir à la position initiale. Comme il y a 2^{25} configurations possibles pour les ampoules, il y en a forcément qui n'auront pas de solutions.

Solution 3 : il suffit d'examiner ce qu'il se passe sur un sous-carré de deux lignes et deux colonnes pour réaliser qu'il n'est pas possible d'allumer toutes les ampoules quand on part d'une ampoule allumée et trois éteintes (ou l'inverse). On peut même démontrer plus : il y a une solution à la configuration initiale si et seulement si aucune sous-configuration de deux lignes et deux colonnes ne contient trois ampoules dans un état et une dans l'autre état. ■

Les problèmes et le corrigé du Concours de l'Association mathématique du Québec de l'an 2004 ont été conçus par M. Matthieu Dufour, Mme Véronique Hussin (présidente), M. Gilbert Labelle et M. Jean M. Turgeon.

Il convient de remercier la *Société mathématique du Canada* qui nous a généreusement accordé une subvention de fonctionnement encore cette année.

Résultats du concours 2004 — Ordre secondaire		
Rang	**Nom**	**Institution**
1er	DRIANOV, Peter	École secondaire Sophie-Barat, Montréal
2e	RUO, Nora	École secondaire Georges-Vanier, Montréal
3e	TIAN, Zhe	École secondaire Mont-Royal, Montréal
4e	ZOU, Cheng Long	École secondaire des Sources, Montréal
5e	HUYNH, Kenny	École secondaire Georges-Vanier, Montréal
6e	GU, Ye	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
	SIMARD, Sébastien	Collège St-Louis - Campus Laval
8e	DEMACHEVA, Irina	Collège Français, Montréal
	MARTIN, Vincent	Académie Les Estacades, Cap-de-la-Madeleine
	BRUNET, Thomas	École secondaire de Rochebelle, Québec
	FONTAINE-SPRINGUEL, Nicolas	École secondaire La Magdeleine, La Prairie
	LAURIN, Stéphane	École secondaire La Magdeleine, La Prairie
13e	MINTCHEV, Ivan	Collège Jean-Eudes, Montréal
	NGUYEN, Thi Ngoc Duin	Polyvalente Père Marquette, Montréal
15e	BABENKO, Mikhail	Collège Français, Montréal
16e	POIRIER, Antoine	Collège St-Alexandre, Gatineau
	DAFINOV, Emil Orlinov	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	TRINH, Quoc-Huy	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	BÉRUBÉ, Nicolas	Collège Mont-Saint-Louis, Montréal
	MARIN, Codmita Inlia	École secondaire Mont-Royal, Montréal
21e	DOMOCOS, Gabriel	Collège Beaubois, Pierrefonds
	THIVIÈRGE, Alexandre	Collège Beaubois, Pierrefonds
	CHEN, Lucas Yu-Guang	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	LANDRY, Marie-Ève	Collège Charles-Lemoyne « L'Envol », Longueuil
25e	PARIS-CLOUTIER, Marc-André	Collège St-Alexandre, Gatineau
	BEAUCHAMP-VIEN, Geneviève	Collège Beaubois, Pierrefonds
	MIRFATAHI, Kaven	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	ZAHARIA, Anne Gabrielle	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	XIAO, Hongyu	Collège St-Louis - Campus Lasalle
	CAGELAIS, Chantal	Collège Charles-Lemoyne « L'Envol », Longueuil
	TREMBLAY-SAVARD, Olivier	Collège Charles-Lemoyne « L'Envol », Longueuil
	DENEAULT, Patricia	École St-Jean-Baptiste, Longueuil
	GONTAR, Marina	École St-Jean-Baptiste, Longueuil
	ST-ARNAUD, Thierry	École St-Jean-Baptiste, Longueuil
35e	MICHON, Érik	Collège St-Alexandre, Gatineau
	CIMON, Alexandre	École secondaire d'Iberville, Rouyn-Noranda
	LAO, Yuan Chu Zi	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
	BERGERON, Luc	École secondaire Jacques-Rousseau, Longueuil
	HE, Yifan	Collège St-Louis - Campus Lasalle