Concours de l'Association mathématique du Québec
2003
Ordre secondaire

Le concours de l'Association mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Pour permettre à ces grands talents de se détacher nettement des autres étudiants, le questionnaire est abondant et varié : plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage donc pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de trois ou quatre questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Bonne chance !

Question 1 : Le club de hockey

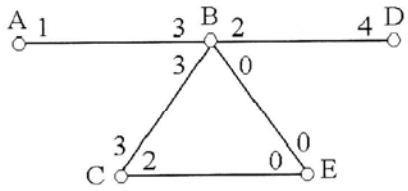
Dans une ligue de hockey à cinq clubs, en début de saison, au moment où aucune paire de clubs ne s'est affrontée plus d'une fois, on a le tableau de résultats incomplet suivant :

	Parties				Buts		
	Jouées	Gagnées	Perdues	Nulles	Pour	Contre	Points
A			1		1	3	0
B			1	2	8	8	
C					5		
D			0	0	4	2	2
E					0		

À la dernière colonne, on accorde deux points pour une partie gagnée et un pour une nulle. Indiquer quelles parties ont été jouées jusqu'ici et avec quels résultats, de façon à compléter le tableau.

Solution

On représente la situation par un graphe dont les sommets sont les cinq clubs et dont deux sommets sont liés par une arête si les clubs correspondants ont joué l'un contre l'autre. Comme aucune paire de clubs ne s'est affrontée plus d'une fois, le graphe est simple (au plus une arête entre deux sommets). On indique sur chaque arête le nombre de buts comptés par chaque club.



Les nombres donnés permettent de compléter les lignes A et D du tableau. Dans le graphe, les sommets A et D sont de degré 1.

	Parties				Buts		
	Jouées	Gagnées	Perdues	Nulles	Pour	Contre	Points
A	1	0	1	0	1	3	0
B	4	1	1	2	8	8	4
C	2	1		1	5	3	3
D	1	1	0	0	4	2	2
E	2	0	1	1	0	2	1

Le club B a huit buts pour et huit buts contre, une partie perdue et deux nulles. Il a donc aussi une partie gagnée, et avec le même écart que dans la partie perdue. On peut donc compléter la ligne B. Dans le graphe, le sommet B est de degré 4; B a gagné 3-1 contre A et perdu 2-4 contre D. Comme E n'a aucun but pour, B a annulé 0-0 contre E et 3-3 contre C. Enfin, l'équilibre des colonnes de buts pour et contre indique que C a gagné 2-0 une partie contre E, ce qui permet de compléter le tableau et le graphe.

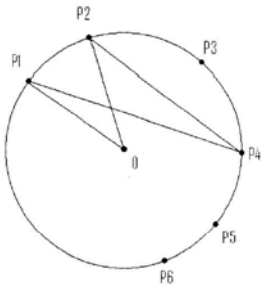
Question 2 : Six points sur une circonférence

Considérons six points disposés au hasard sur une circonférence de rayon 1.

Montrer que, quelle que soit cette disposition, on est toujours capable de choisir trois points, que nous appellerons A, B et C, de telle sorte que l'angle ABC soit inférieur ou égal à 30 degrés.

Solution

On dispose les 6 points P1, P2, P3, P4, P5, P6 circulairement dans l'ordre sur une circonférence de centre O comme sur le dessin.



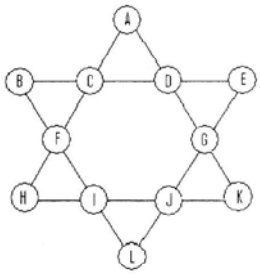
Si on désigne par XY l'angle au centre sous-tendu par les points X et Y sur la circonférence (i.e. $\angle$XOY), alors

$$P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + P_4P_5 + P_5P_6 + P_6P_1 = 360°.$$

On est donc assuré de trouver deux points successifs (P_1 et P_2 dans cette figure) tels que $P_1P_2 \leq 60°$, car sinon la somme des angles serait supérieure à 360°. On sait que l'angle $\angle P_1P_4P_2$ vaut la moitié de l'angle au centre $P_1P_2 = \angle P_1OP_2$, donc $\angle P_1P_4P_2 \leq 30°$.

Question 3 : L'astronome mathématicien

Passionné d'astronomie, Philippe dessine des étoiles partout. Ce matin, il a dessiné l'étoile ci-contre, en se demandant s'il pouvait placer les nombres de 1 à 12 sur les sommets identifiés par des lettres de telle sorte que la somme sur chacun des six côtés droits (ADGK, EGJL, etc.) soit toujours égal à la même constante.



a) Trouver cette constante et montrer que c'est la seule possible.

b) Donner une solution.

Solution

a) Soit N la constante cherchée, il y a exactement 6 sommes qui valent N . En effet, on a

$$A+C+F+H=N,$$
$$A+D+G+K=N,$$
$$B+C+D+E=N,$$
$$B+F+I+L=N,$$
$$E+G+J+L=N,$$
$$H+I+J+K=N.$$

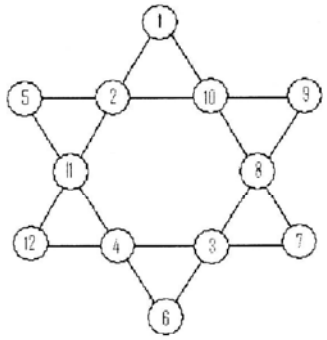
Si on additionne toutes ces équations, cela donne

$$2(A+B+C+D+E+F+G+H+J+I+K+L)=6N.$$

Par ailleurs, on trouve aisément que la somme de tous les nombres de 1 à 12 vaut 78, c'est-à-dire que $A+B+C+D+E+F+G+H+J+I+K+L=78$.

Donc,
$N = 2(A+B+C+D+E+F+G+H+J+I+K+L)/6$
$=2*78/6 =26.$

b) Une solution possible est donnée par l'étoile suivante :



Question 4 : Les expériences de Juliette

Juliette aime faire des expériences mathématiques. Aussi, a-t-elle été fort intriguée quand elle a observé que si on fabrique un nombre en juxtaposant un certain nombre de fois le chiffre 1 puis autant de fois le chiffre 8, alors le quotient obtenu en divisant ce nombre par 18 semble toujours être un entier ! Elle a de plus remarqué qu'à partir de 111 888, le quotient obtenu en divisant par 18 semble toujours être lui-même divisible par 4.

Elle a illustré ses observations dans le tableau ci-contre pour les premières valeurs de n :

Nombre de chiffres « 1 »	Nombre fabriqué	Nombre fabriqué divisé par 18	Nombre précédent factorisé par 4
2	1 188	66	-
3	111 888	6 216	4×1554
4	11 118 888	617 716	$4 \times 154\,429$
5	1 111 188 888	61 732 716	$4 \times 15\,433\,179$
6	111 111 888 888	6 172 882 716	$4 \times 1\,543\,220\,679$

a) Démontrer que ces deux observations sont toujours vraies.

b) Trouver les deux autres nombres de la forme AB (avec A distinct de B) entre dix et cent qui ont la propriété que

$$\frac{AABB}{AB}, \frac{AAABBB}{AB}, \frac{AAAABBBB}{AB}, \text{ etc.}$$

sont tous des entiers.

Solution

a) Clairement, le nombre fabriqué avec n chiffres 1 suivis de n chiffres huit est un nombre dont la somme des chiffres est divisible par 9 (il suffit de coupler chaque 1 avec un 8). Donc, ce nombre est lui-même divisible par 9. De plus, ces nombres sont pairs, donc divisibles par 18. Enfin, quand n est supérieur à 2, le nombre fabriqué de termine par 888. Il est donc divisible par 8, et donc par $9 \times 8 = 72$, i.e. par 4 après simplification par 18.

b) Supposons que n est un entier supérieur ou égal à 2. Le nombre fabriqué avec n chiffres A et n fois le chiffre B (distinct de A) est égal à :

$AA...ABB...B$, où les points de suspension signifient qu'il y en en tout n chiffres identiques.

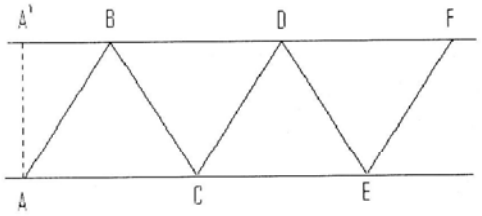
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} AA\ldots ABB\ldots B &= AA\ldots A \times 10^n + BB\ldots B \\ &= A \times 11\ldots1 \times 10^n + B \times 11\ldots1 \\ &= 11\ldots1\,(10^n\,A + B) \end{aligned}$$

Puisque les facteurs de 11...1 varient selon le nombre de 1 (11 est premier, $111 = 3 \times 37$, $1111 = 11 \times 101$, $11111 = 41 \times 271$, etc.), le nombre $AA...ABB...B$ sera divisible par $10A + B$ à la condition que $10^n A + B$ soit un multiple de $10A + B$. Il est facile de voir que $A = 1$, $B = 5$ et $A = 4$, $B = 5$ donnent deux solutions. En effet, dans le premier cas, les nombres de la forme 11...11155...5 ont une somme des chiffres multiple de 6, donc multiple de 3, et donc ces nombres sont divisibles par 3. De plus, se terminant par un 5, ce sont des multiples de 5, et donc de 15, ce qu'on voulait démontrer. Dans le deuxième cas, on montre de façon analogue que les nombres de la forme 44...455...5 sont divisibles à la fois par 9 et par 5, donc par 45. Ce sont les deux seules solutions possibles, ce qu'on affirmait dans l'énoncé du problème sans demander à le démontrer.

Question 5 : Le zigzag tracé par la balle

Une balle rebondit entre deux murs parallèles en parcourant le zigzag $ABCDEF$.



La distance AA' entre les deux murs est de 5 mètres. À sa grande surprise, le professeur Cosinus constate que, dans son expérience, la longueur du zigzag est exactement égale à la somme des distances AA' et $A'F$. Quelle est la longueur du zigzag parcouru par la balle ?

Note : On ne tient pas compte de la grosseur de la balle et on la considère comme un point géométrique. On remarque aussi que la figure n'a pas été tracée à l'échelle et il est donc inutile de mesurer.

Solution

Désignons par x la longueur du segment A'B. Alors BD = DF = $2x$.

On a alors $AB = \sqrt{AA'^2 + A'B^2} = \sqrt{25 + x^2}$. Puisque AB = BC = CD = DE = EF, la longueur totale du zigzag est $5\sqrt{25+x^2}$. On a aussi $AA' + A'F = 5 + 5x$, ce qui nous donne à résoudre l'équation $5\sqrt{25+x^2} = 5 + 5x$. En divisant par 5 et élevant au carré, on trouve $25 + x^2 = x^2 + 2x + 1$, i.e. $x = 12$.

Donc $AB = \sqrt{25+12^2} = 13$ et la longueur du zigzag est $5 \times 13 = 65$ m.

Question 6 : Le tour de magie d'Étienne

Étienne choisit six chiffres différents de 1 à 9. Il forme deux nombres de trois chiffres, *ABC* et *DEF*. Avec ces deux nombres, il forme le nombre de six chiffres *ABC DEF*. Il multiplie ce nouveau nombre par 6, prononce une formule magique et... il obtient *DEF ABC*, soit le nombre formé par les deux nombres de trois chiffres initiaux, mais dans l'ordre inverse !

a) Trouver les chiffres *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F*.

b) Montrer que le nombre *DEF ABC* est divisible par 54.

c) À la sortie du concours, courir épater les amis avec ce tour de magie !

Note : même si on n'arrive pas à trouver la partie a), il existe un argument très simple et joli pour démontrer b) sans connaître la valeur d'une seule des lettres !

Solution

a) Il s'agit donc de résoudre l'alphamétique

$$ABC\ DEF \times 6 = DEF\ ABC\ .$$

On peut évidemment y aller par tâtonnement. Par exemple, on déduit d'abord que *A* vaut 1, puisqu'il ne peut égaler 0 et qu'une valeur supérieure à 1 donnerait après multiplication par six un nombre de sept chiffres. Donc $ABC \geq 123$ et puisque $123 \times 6 = 738$, on en déduit que $D \geq 7$. On a aussi que *F* doit être pair, et ainsi à force de patience, d'épuisement des cas et d'éliminations, on en arrive à l'unique solution : $142\,857 \times 6 = 857\,142$.

Mais, ce problème admet aussi une solution très courte qui en fait sans doute le plus joli alphamétique posé au concours de l'AMQ depuis des années.

On veut résoudre $ABC\ DEF \times 6 = DEF\ ABC$.

Puisque $ABC\ DEF = 1000 \times ABC + DEF$ et $DEF\ ABC = 1000 \times DEF + ABC$, l'équation à résoudre devient

$$6000 \times ABC + 6 \times DEF = 1000 \times DEF + ABC\ ,$$

i.e.

$$5999 \times \mathrm{ABC} = 994 \times DEF\ .$$

En divisant de chaque côté par 7, cette équation devient :

$857 \times ABC = 142 \times DEF$, d'où $ABC = 142$ et DEF = 857 ! Puisque 857 est un nombre premier, il n'est pas possible de factoriser autrement et la solution est unique. Voilà!

Observation intéressante : 142857 est la période du développement décimal d'un septième :

$$1/7 = 142857\ 142857\ 142857\ ...$$

b) *DEF ABC* est divisible par 3 puisque c'est le résultat de $6 \times ABC\ DEF$. Donc, la somme des chiffres de *DEF ABC* est divisible par trois, et cette somme étant la même que pour *ABC DEF*, ce dernier nombre est également divisible par 3. Donc, *DEF ABC* est divisible par 9, étant le produit par six d'un multiple de trois. La somme des chiffres de *DEF ABC* est divisible par 9 et la somme des chiffres de *ABC DEF* aussi, ce qui fait de *ABC DEF* un multiple de 9, et donc *DEF ABC* est un multiple de 54 !

En effet, on a d'ailleurs $857\,142 = 54 \times 15\,873$.

Question 7 :

Trouver tous les points du plan à coordonnées entières satisfaisant à l'équation $x^2 - 3xy - 7y = 11$.

Solution

Solution 1. Isoler d'abord x. On obtient

$$x^2 - (3y)x - (7y + 11) = 0\ .$$

Les solutions sont

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{3y \pm \sqrt{9y^2+28y+44}}{2}$$

Comme x est un entier, $9y^2+28y+44$ est un carré parfait. Posons

$$k^2 = 9y^2+28y+44 .$$

Pour compléter plus facilement le carré, on multiplie par 9. On obtient

$$\begin{aligned} 9k^2 &= 81y^2+252y+396 \\ &= (9y+14)^2 - 14^2 + 396 \\ &= (9y+14)^2 + 200 , \end{aligned}$$

d'où

$$[3k+(9y+14)][3k-(9y+14)] = 200 .$$

Les diviseurs de $200 = 2^3 5^2$ sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100 et 200. On a donc six cas à considérer

$3k+(9y+14)$	200	100	50	40	25	20
$3k-(9y+14)$	1	2	4	5	8	10
(+) k =	201/6	17	9	45/6	33/6	5
(−) $9y+14$	199/2	49	23	35/2	17/2	5

Cela implique que

$$9y+14 \in \{-49, -23, -5, 5, 23, 49\}$$

et

$$9y \in \{-63, -37, -19, -9, 9, 35\} ,$$

de sorte que $y \in \{-7, -1, 1\}$. On substitue ces valeurs de y dans

$$x^2 - (3y)x - (7y+11) = 0 .$$

On obtient

y	$x^2-(3y)x-(7y+11)=0$
−7	$x^2+21x+38=(x+2)(x+10)=0$
−1	$x^2+3x-4=(x-1)(x+4)=0$
1	$x^2-3x-18=(x-6)(x+3)=0$

Les solutions en nombres entiers sont donc $(-19,-7)$, $(-4,-1)$, $(-3,1)$, $(-2,-7)$, $(1,-1)$ et $(6,1)$.

Solution 2. Les calculs sont plus faciles si on isole d'abord y. On obtient

$$y(3x+7) - (x^2-11) = 0$$

$$y = \frac{x^2-11}{3x+7} = \frac{1}{9}\left[3x - 7 - \frac{50}{3x+7}\right].$$

Comme y est un entier, $3x+7$ divise 50. Les diviseurs de $50 = 2 \times 5^2$ sont 1, 2, 5, 10, 25 et 50. Donc $3x+7 \in \{50,-25, -10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10, 25, 50\}$, de sorte que

$3x \in \{-57, -32, -17, -12, -9, -8, -6, -5, -2, 3, 18, 43\}$

et

$$x \in \{-19, -4, -3, -2, 1, 6\}.$$

On a donc les solutions entières $(-19,-7)$, $(-4,-1)$, $(-3,1)$, $(-2,-7)$, $(1,-1)$ et $(6,1)$. ■

Les problèmes et le corrigé du Concours de l'Association mathématique du Québec de l'an 2003 ont été conçus par M. Matthieu Dufour, Mme Véronique Hussin (présidente), M. Gilbert Labelle et M. Jean M. Turgeon.

Il convient de remercier la *Société mathématique du Canada* qui nous a généreusement accordé une subvention de fonctionnement encore cette année.

Résultats du concours 2003 — Ordre secondaire

Rang	Nom	Institution
1er	ROY DES RIVIÈRES, Simon	École secondaire Cardinal-Roy, Québec
2e	RAPEANU, Diane	Collège Notre-Dame, Montréal
3e	DENG, Zhoutong	Polyvalente Lucien-Pagé, Montréal
4e	HARNOIS, Michaël	Collège Charles-Lemoyne « L'Envol », Longueuil
5e	SUN, Siwen	Collège St-Louis, Lachine
6e	GE, Yin	École Internationale de Montréal, Montréal
	CAVAYAS, Yiorgos Alexandros	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
8e	TUKIRQI, Maali	École Arasnik, Kangiqsujuaq
	MORIN-DEFOY, Chloé	Collège Jean-de-Brébeuf
10e	PRZYBYTHOWSKI, Karol	Collège Durocher, St-Lambert
	LATOUR LARRÉA, Joëlle	Collège Beaubois, Pierrefonds
12e	TAK MOK, Yien	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
	DESGROSEILLERS, Marc	Collège St-Paul-de-Varennes, Varennes
14e	GAGNON, Maxime	Collège St-Hilaire, Mont-St-Hilaire
	TRAN, Min-Tâm	Collège St-Louis, Lachine
16e	FORTIN, Simon	Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi
17e	BELLEFLEUR, Raphaël	École secondaire Marcellin-Champagnat
18e	WEIGAND-WARR, Frédéric	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
19e	DUSSEAULT, Brigitte	École secondaire Louis-Riel, Montréal
	BEAULIEU-PELLETIER, Guillaume	Collège Mont St-Louis, Montréal
	DAIGNEAULT, Stéphanie	École secondaire La Magdeleine, La Prairie
22e	DEMERS, Sylvain	École secondaire Jacques-Rousseau, Longueuil
	MALONEY, Rémi	École secondaire Marcellin-Champagnat
24e	QUENNEVILLE-BÉLAIR, Vincent	École secondaire Jacques-Rousseau, Longueuil
	GAGNON, Josiane	Collège Beaubois, Pierrefonds
	ROCHRICH-GASCON, Didier	Collège St-Charles-Garnier, Québec
	BERTRAND, Véronique	École secondaire St-Marc, St-Marc-des-Carrières
	RONG, Han Bin	Collège Jean-Eudes, Montréal
29e	MINTCHEV, Ivan	Collège Jean-Eudes, Montréal
	FILION, Nicolas	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	LAPOINTE-NGUYEN, Damien	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	IBIAPINA, Tiara	Commission scolaire Lac St-Jean, Alma
33e	LAVOIE, Caroline	Académie Antoine-Manseau, Joliette
	CRIISAFI, Nicolas	Collège St-Alexandre, Gatineau
	TRIFFAULT, Nicolas	Collège St-Alexandre, Gatineau
	GALOUSTIAN, Gourgen	Collège Français, Montréal
	VOUTSINOS, Patrice	Collège St-Louis, Lachine
	RICARDO, Charles	École secondaire Marie-Victorin, Montréal
	SÉGUIN, Guillaume	Collège St-Alexandre, Gatineau