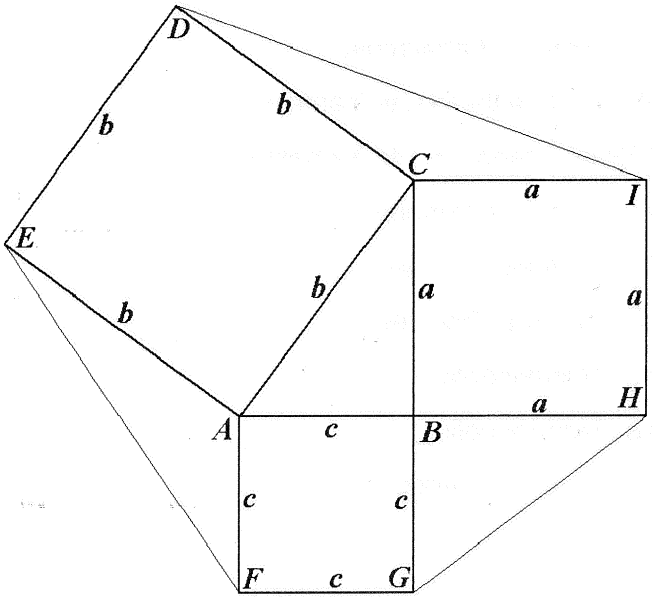
Concours de l'Association mathématique du Québec 2002
Ordre secondaire

Le concours de l'Association mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Pour permettre à ces grands talents de se détacher nettement des autres étudiants, le questionnaire est abondant et varié : plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté.

Les problèmes posés sont moins difficiles que ceux des années précédentes. Tout de même, qu'un étudiant ne se décourage pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de trois ou quatre questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Au concours de l'an 2000, deux concurrents en ont donné sept. Un des deux a répété son exploit en 2001.

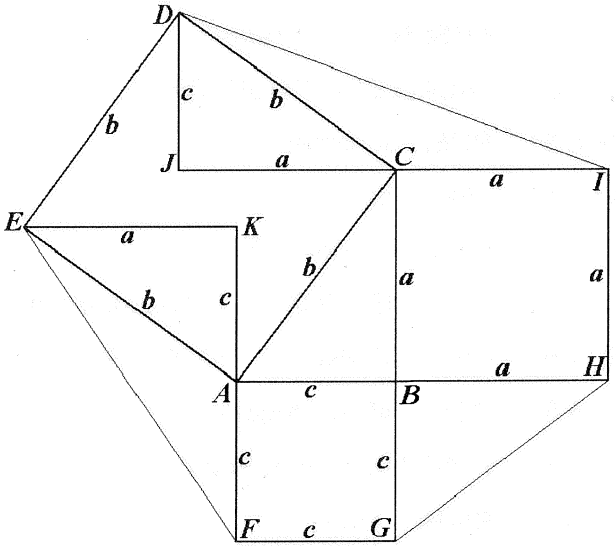
1. Les carrés sur les côtés d'un triangle

On considère un triangle rectangle ABC, dont l'angle B est droit. Soient a, b et c les côtés opposés aux sommets A, B et C respectivement. À l'extérieur du triangle, on construit le carré $BHIC$, de côté a, le carré $ACDE$, de côté b, et le carré $AFGB$, de côté c. On construit enfin les segments de droites ID, EF et GH. Démontrer que les aires des triangles AEF, BGH et CID sont égales à l'aire du triangle ABC.



Solution

Les triangles ABC et BGH sont de même aire, $ac/2$, ayant tous deux la base c et la hauteur a.



Pour aider à évaluer l'aire du triangle CID, on fait tourner le triangle ABC autour du point fixe C, dans le sens des aiguilles d'une montre analogique, jusqu'à ce que le point A tombe sur le point D. Appelons J le point où tombe le point B. Alors $DJ = c$ est la hauteur du triangle CID, dont l'aire est $ac/2$, l'aire du triangle ABC.

Pour évaluer l'aire du triangle AEF, on fait tourner le triangle ABC autour du point fixe A dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, jusqu'à ce que le point C tombe sur le point E. Appelons K le point où tombe le point B. Alors $EK = a$ est la hauteur du triangle AEF, dont la base est $AF = c$. Ainsi l'aire du triangle AEF est aussi $ac/2$.

2. Une somme de nombres à trois chiffres

Calculer la somme de tous les nombres à trois chiffres que l'on peut former avec les seuls chiffres 1, 2, 3 et 4, les répétitions étant admises.

Solution

Les nombres qui satisfont aux conditions données et dont le premier chiffre est 1 sont

111 112 113 114 121 122 123 124
131 132 133 134 141 142 143 144

Il y en a 16. Il est clair qu'il y a aussi 16 nombres qui ont 1 comme chiffre du centre et 16 qui ont 1 comme troisième chiffre. La même chose peut être dite des chiffres 2, 3 et 4. Dans la somme cherchée, chaque chiffre apparaît donc 16 fois dans chacune des trois positions. La somme de chaque colonne est donc

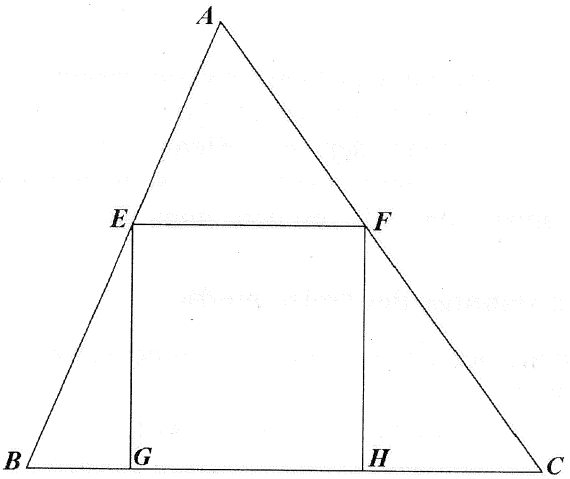
$$16\,(1+2+3+4) = 160$$

et la somme cherchée est

$$160\,(100+10+1) = 160 \times 111 = 17\,760.$$

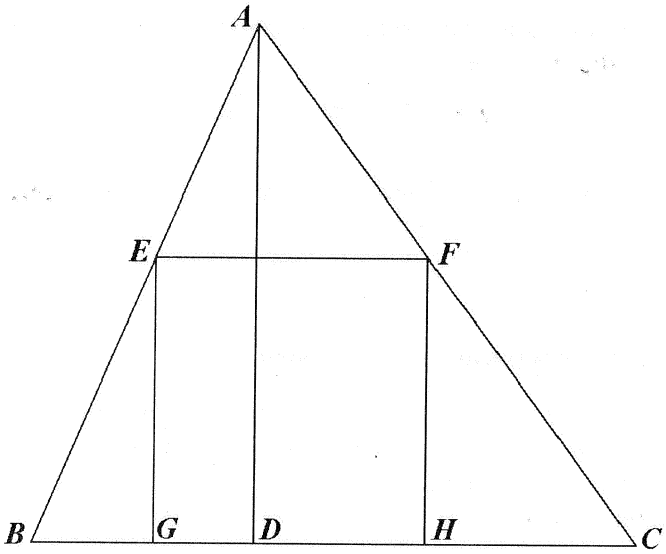
3. Un carré dans un triangle

Dans le triangle ABC, on a $AB = 13$, $AC = 15$ et $BC = 14$. Déterminer le point E sur AB qui fait que $EFHG$ est un carré.



Solution

Soit D le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur le côté BC.



Dans les triangles semblables AEF et ABC, on a

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}$$

et dans les triangles semblables BEG et BAD, on a

$$\frac{EG}{AD} = \frac{EB}{AB}$$

Par ailleurs, $EB = AB - AE$, de sorte que

$$EG = \frac{EB}{AB} \cdot AD = \frac{(AB - AE) \cdot AD}{AB}$$

et $EFGH$ est un carré si $EG = EF$. On obtient donc

$$\frac{(AB - AE) \cdot AD}{AB} = \frac{AE \cdot BC}{AB}$$

ou

$$AB \cdot AD = AE(AD + BC)$$

ou encore

$$AE = \frac{AB \cdot AD}{AD + BC}.$$

On connaît AB et BC. Il reste à déterminer AD. Dans ce but, on évalue d'abord BD. On considère les deux triangles rectangles ABD et ADC, dont AD est un côté commun. En vertu du théorème de Pythagore,

$$AB^2 - BD^2 = AD^2 = AC^2 - CD^2$$

ou

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - (BC - DB)^2$$

ou

$$13^2 - BD^2 = 15^2 - (14 - BD)^2$$

ou

$$13^2 - 15^2 = BD^2 - (14 - BD)^2 .$$

Après quelques manipulations, on obtient $BD = 5$. On trouve finalement

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{44} = 12 .$$

On revient donc à l'équation qui donne AE et on obtient

$$AE = \frac{AB \cdot AD}{AD + BC} = \frac{13 \cdot 12}{12 + 14} = 6.$$

4. Des divisions et des restes

Trouver le plus petit entier positif n tel que, quand on divise n par 6, le reste est 4, quand on divise n par 8, le reste est 6, quand on divise n par 9, le reste est 7, quand on divise n par 12, le reste est 10.

Solution

D'après les données, $n+2$ est un commun multiple de 6, 8, 9 et 12. Comme PPCM (6,8,9,12) = 72, on a $n+2 = 72$ et $n = 70$.

5. Des jumeaux et un isolé

Juliette a eu *deux* plus *un* enfants, comme elle dit, c'est-à-dire des jumeaux et un isolé. La somme des âges de ses enfants est 42 ans et la différence est 6 ans. On ne sait pas si l'isolé est plus jeune ou plus vieux que les jumeaux. Quel âge ont les enfants de Juliette ? Donner toutes les solutions possibles.

Solution

Soit x l'âge d'un jumeau et y l'âge de l'isolé.

Supposons que $x > y$. Alors la somme des âges des enfants donne l'équation $2x + y = 42$ et la différence des âges donne $x - y = 6$. On obtient $x = 16$ et $y = 10$.

Si $x < y$, les équations sont $2x + y = 42$ et $y - x = 6$. On obtient $x = 12$ et $y = 18$.

6. Le polynôme de l'année 2002

Soit $p(x)$ un polynôme de degré trois à racines entières. Quelle est la plus petite valeur possible de $|p(0)|$ si $p(10) = 2002$ et le coefficient de x^3 est 1 ?

Solution

Selon les données du problème, on peut poser

$$p(x) = (x + a)(x + b)(x + c)$$

où a, b et c sont des entiers, opposés des racines. Le problème revient donc à trouver la plus petite valeur possible de $|abc|$, sachant que

$$2002 = (10 + a)(10 + b)(10 + c).$$

Il suffit ici de dresser la liste des façons de décomposer 2002 en produit de trois entiers.

On a $2002 = 2 \times 1001$.

Comme 1001 est une somme de cubes, $(10^3 + 1^3)$, on obtient aisément la décomposition

$$10^3 + 1^3 = (10+1)(10^2 - 10 + 1^2) = 11 \times 91.$$

Puisque $91 = 7 \times 13$, on a $2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$.

Il y a plusieurs façons de décomposer 2002 en produit de trois entiers positifs : $2 \times 11 \times 91$, $1 \times 22 \times 91$, $1 \times 2 \times 1001$, $1 \times 11 \times 182$, $1 \times 1 \times 2002$, $7 \times 13 \times 22$, etc.

Puisque $|abc|$ doit être le plus petit possible, il faut que chacun des facteurs $(10 + a)$, $(10 + b)$ et $(10 + c)$ soit le plus près possible de 10. Ainsi, il apparaît clairement que le facteur 11 doit être laissé seul ($(10 + a) = 11$ donne $a = 1$, excellent départ) et que le facteur 2 doit être couplé avec 7 ou 13.

On trouve donc $2002 = (10+1)(10+3)(10+4)$ pour $abc = 1 \times 3 \times 4 = 12$.

Pour confirmer que c'est bien la solution minimale, observons que, si on couple 2 avec 11 ou 13, on trouve 22 ou 26, ce qui donne déjà une différence d'avec 10 au mois égale à 12, notre solution. La solution trouvée, pour laquelle $abc = 12$, est donc minimale.

7. La semaine des treize jeudis

Remplacer les lettres par des chiffres de 0 à 9 pour que l'équation

$$\text{JEUDI} \times 13 = \text{SEMAINE}$$

se vérifie (la même lettre représente toujours le même chiffre ; à des lettres différentes correspondent des chiffres différents ; la première lettre d'un mot ne représente jamais le chiffre 0).

Solution

Pour plus de commodité, écrivons l'équation sous la forme

$$\begin{array}{r} J\ E\ U\ D\ I \\ \times\ 1\ 3 \\ \hline S\ E\ M\ A\ I\ N\ E \end{array}$$

On remarque immédiatement que S = 1, car JEUDI ≤ 98765 et donc SEMAINE ≤ 98765 × 13 = 1 283 945. Par le même argument, on a aussi que E ≤ 2, i.e. E = 0 ou 2, car 1 est déjà pris. Mais, la première colonne (à partir de la droite) nous indique que, si E = 0, alors I = 0 aussi, ce qui n'est pas possible. Donc, E = 2.

Si J ≤ 8, alors J2UDI ≤ 82976, et donc

$$12MAIN2 \leq 82976 \times 13 = 1\,078\,688,$$

ce qui est absurde, puisque E = 2. Donc, J = 9.

Répétons maintenant notre premier argument en intégrant ces informations supplémentaires :

$$92UDI \leq 92876$$

entraîne que

$$12MAIN2 \leq 92876 \times 13 = 1\,207\,388,$$

ce qui nous donne M = 0.

La colonne de droite nous indique que I = 4, car c'est la seule valeur possible qui, multipliée par 3, se termine par 2.

Récapitulons :

$$\begin{array}{r} 9\ 2\ U\ D\ 4 \\ \times\ 1\ 3 \\ \hline 1\ 2\ 0\ A\ 4\ N\ 2 \end{array}$$

Il reste pour U, D A et N les valeurs 3, 5, 6, 7 et 8. On sait que D4 × 13 se termine par N2. En donnant à D les valeurs 3, 5, 6, 7 et 8, on obtient que D4 × 13 se termine respectivement par 42 (rejeté), 02 (rejeté), 32, 62 et 92 (rejeté). Donc D = 6 et N = 3 ou D = 7 et N = 6. En examinant les cas, on arrive à la conclusion que la première possibilité ne permet pas d'attribuer des valeurs à A et U tandis que la seconde conduit à la solution finale : M = 0, S = 1, E = 2, A = 3, I = 4, U = 5, N = 6, D = 7 et enfin J = 9, pour

JEUDI = 92 574 et SEMAINE = 1 203 462.■

Les problèmes et le corrigé du Concours de l'Association mathématique du Québec de l'an 2002 ont été conçus par M. Matthieu Dufour, Mme Véronique Hussin (présidente), M. Gilbert Labelle et M. Jean M. Turgeon.

Il convient de remercier la *Société mathématique du Canada* qui nous a généreusement accordé une subvention de fonctionnement encore cette année.

Félicitations à toutes les participantes et à tous les participants.

Résultats du concours 2002 — Ordre secondaire		
Rang	**Nom**	**Institution**
1er	WANG, Letao	École Marcellin-Champagnat, Saint-Athanase
2e	LAURIN, Étienne	École secondaire Marie-Victorin, Montréal
3e	DENG, Zhoutong	Polyvalente Lucien-Pagé, Montréal
4e	DESJEANS-GAUTHIER, Philipp	Collège Beaubois, Pierrefonds
	LUONG, Rémi	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	THÉRIAULT, Sébastien	École polyvalente de Cabano, Cabano
7e	BEAUDET, David	Collège St-Paul de Varennes, Varennes
	BOUCHER, Jean-François	Cité étudiante, Roberval
	DEMERS, Sylvain	École secondaire Jacques-Rousseau, Longueuil
	KELNER, Léonid	École secondaire St-Henri, Montréal
	LEMAY, Mathieu	Collège Mont-Saint-Louis, Montréal
	MARCHI, Pascal	École secondaire Sophie-Barat, Montréal
13e	FORTIN, Simon	Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi
	GUAY-PAQUET, Mathieu	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
	HAMEL-BOURBEAU, Jonathan	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	WEIGAND-WARR, Frédéric	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
17e	BOULANGER-GOBEIL, Cindy	Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi
	BRIEN, Simon	École Saint-François-Xavier, La Prairie
	LE DUY, Mau An	École secondaire La Voie, Montréal
	YAO, Zeshui	Académie Michel-Provost inc., Montréal
21e	ALAIN, Benoît	Collège Saint-Alexandre, Gatineau
	DANIEL BEN-TCHAVTCHAVADZE, Romy	Collège Sainte-Anne, Lachine
	GE, Yin	École internationale de Montréal, Westmount
	HAMMAL, Charles	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	LAROCHELLE, Patrick	Collège Saint-Charles Garnier, Québec
	LÉGER-ST-JEAN, Marie-Pier	École secondaire Sophie-Barat, Montréal
	MALOIN, Patrick	Académie Sainte-Thérèse, Sainte-Thérèse
	RONG, Han Bin	Collège Jean-Eudes, Montréal
29e	BOURGEOIS-DAIGEAULT, Marie-Claude	Collège Saint-Paul de Varennes, Varennes
	DAIGNEAULT, Stéphanie	École Saint-François-Xavier, La Prairie
	D'AMOUR, Hadrian	Collège Jean-Eudes, Montréal

Résultats du concours 2002 — Ordre secondaire

Rang	Nom	Institution
	DESJARDINS, Philip	Collège Beaubois, Pierrefonds
	LACHANCE, Simon	École polyvalente Le Delta, Matagami
	LÉVESQUE, Mélanie	Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi
	NGUYEN, Célia	École secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux
	ROUILLARD, Alexandra	École secondaire d'Iberville, Rouyn-Noranda
	ROUSSEAU, Audrey-Frédérique	Académie Les Estacades, Cap-de-la-Madeleine
	ROY DES RIVIÈRES, Simon	École secondaire Cardinal-Roy
	SÉGUIN, Guillaume	Collège St-Alexandre, Gatineau
40e	MÉNARD-GAUTHIER, Marie-Ève	Séminaire du Sacré-Coeur, Pointe-au-Chêne
	PAULO, Jean-Gilbert	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	YANOFSKY, Valerie	Herzliah Snowdon, Montréal
43e	CHAHWAN, Martine	Collège Sainte-Marcelline, Montréal
	COUTURE, Simon	Académie Sainte-Thérèse, Sainte-Thérèse
	MASSIE, Gabriel	Séminaire du Sacré-Coeur, Pointe-au-Chêne
	ORNG, Kanitha	École secondaire des Sources, Dollard-des-Ormeaux
	RAYMOND, Annie	Collège Jean-Eudes, Montréal
	ST-MAURICE, Mathieu	Collège Beaubois, Pierrefonds
	VINCENT, Charles	École secondaire La Voie, Montréal
50e	FORCIER, Simon	Collège Jean-Eudes, Montréal
	HARNOIS, Michaël	Collège Charles Lemoyne « L'Envol », Longueuil
	LEFEBVRE, Caroline	Collège Sainte-Anne, Lachine
	MATHIEU, Marc-Étienne	Petit Séminaire de Québec, Québec
	MORCEL, Rémi	Collège Beaubois, Pierrefonds
55e	BÉRUBÉ, Anick	École d'éducation internationale, Saint-Hubert
	BONIN, Jonathan	École secondaire Saint-Joseph, Saint-Hyacinthe
	BUISSIÈRE-DICAIRE, Marie-Michèle	Collège Laval, Laval
	CISNEROS, Manuel	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	DESGAGNÉ, Véronique	École secondaire d'Iberville, Rouyn-Noranda
	GRAVEL, Myriam	Académie Antoine-Manseau, Joliette
	GUERBAZ, Youssef	École secondaire La Voie, Montréal
	LAROCHELLE, Hugo	École secondaire Pointe-aux-Trembles, Montréal

Résultats du concours 2002 — Ordre secondaire		
Rang	**Nom**	**Institution**
	LASNIER-HÉBERT, Raphaël	École secondaire Saint-Joseph, Saint-Hyacinthe
	LE BOUTILLIER, Philippe	Collège Saint-Alexandre, Gatineau
	MORIN, Geneviève	Collège Saint-Charles Garnier, Québec
	RIOUX, Anne	Académie Les Estacades, Cap-de-la-Madeleine
	SIROTA, Léonid	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	VANIER, David	École Saint-François-Xavier, La Prairie
69e	BASTIEN, Maléna	Collège Sainte-Marcelline, Montréal
	BEDROSSIAN, Matios	École secondaire Marie-Curie, Laval
	CHAMPAGNE, Samuel	Polyvalente Saint-François, Beauceville
	COMO, Josaphat	Séminaire de Sherbrooke, Sherbrooke
	DESGROSEILLIERS, Marc	Collège Saint-Paul de Varennes, Varennes
	GERMAIN, Éric	Collège Charles Lemoyne « L'Envol », Longueuil
	HAECK, Jean-François	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	LAVOIE, Caroline	Académie Antoine-Manseau, Joliette
	LEMIEUX, François	École secondaire Jean-Grou, Montréal
	SAMADI, Nadia	École secondaire La Voie, Montréal
	TOMISIC-SUTEJ, John	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
	TREMBLAY, Philippe	Séminaire de Chicoutimi, Chicoutimi
81e	BILODEAU, Jean-Philippe	Collège Sainte-Anne, Lachine
	BOISVERT, Martin	Académie Les Estacades, Cap-de-la-Madeleine
	CAFARO, Anthony	Collège Laval, Laval
	CARRIER, Marie-Christine	Collège Charles Lemoyne « L'Envol », Longueuil
	CHAPMAN, Audrey	École secondaire Saint-Joseph, Saint-Hyacinthe
	CHEN, Marie-Luce	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	DAGBERT, François	Collège Laval, Laval
	EMARD, Catherine	École secondaire Saint-Joseph, Saint-Hyacinthe
	FLEURY, Richard	École Saint-François-Xavier, La Prairie
	CARON, Ariane	École Saint-François-Xavier, La Prairie
	GUÉRIN, Gabriel	Commission scolaire du Lac St-Jean, Alma
	LANDRY, Cynthia	Collège Charles Lemoyne « L'Envol », Longueuil
	LAVOIE, Annik	École Saint-François-Xavier, La Prairie

Résultats du concours 2002 — Ordre secondaire		
Rang	**Nom**	**Institution**
	LEFEBVRE, Éric	Séminaire du Sacré-Coeur, Pointe-au-Chêne
	MAHENDRA, Raja Tharini	École secondaire La Voie, Montréal
	NADEAU, Jonathan	École secondaire Louis-Riel, Montréal
	P.-BÉLANGER, Maxime	École secondaire de la Pointe-aux-Trembles, Monréal
	POIRIER, Mélanie	Polyvalente Nicolas-Gatineau, Gatineau
	ROY-DESAUTELS, Audrey	Pensionnat des Ursulines, Stanstead
	ROYER-PERRON, Louis	Collège Jean-Eudes, Montréal
	TREMBLAY, Jill	Commission scolaire du Lac St-Jean, Alma

Félicitations
à toutes les participantes
et
à tous les participants.