1. Toujours carré

On peut remarquer que le résultat de $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1$ est 25, qui est un carré parfait. Prouver que le produit de quatre entiers naturels consécutifs, auquel on ajoute 1, donne toujours un carré parfait.

2. Alicia peut-elle gagner ?

Dans un jeu à deux joueurs, on doit placer tous les nombres de 1 à 9 dans les neuf cases d'une grille 3 par 3.

- Le premier joueur inscrit un nombre de 1 à 9 sur une des cases de la grille.
- À son tour, le deuxième joueur inscrit un nombre sur une des cases libres de la grille. Ce nombre doit être différent de tous ceux déjà inscrits.
- Le jeu continue en alternance.
- Le premier joueur gagne si, à un moment, la somme des trois nombres dans au moins une ligne ou une colonne est 14.
- Le deuxième joueur gagne si cela ne se produit pas (et que les neuf nombres ont été inscrits).

Alicia débute la partie. Benoit joue en deuxième.

Est-ce qu'Alicia peut jouer de sorte à pouvoir toujours gagner ? Si elle peut, expliquer clairement en quoi consiste sa stratégie et montrer qu'elle est gagnante. Si elle ne peut pas, expliquer comment Benoit peut jouer pour réussir à la battre.

3. Combien de dés doit-il relancer ?

Un jeu consiste à lancer cinq dés une première fois. Par la suite, on peut sélectionner certains des 5 dés (possiblement aucun ou tous) et les relancer afin d'obtenir une combinaison voulue.

Jérôme lance les cinq dés et obtient le résultat suivant : 1-2-4-2-1.

Son objectif est d'obtenir trois résultats semblables au minimum. Il se demande s'il devrait relancer un seul dé (le 4) ou bien en relancer trois (les 2-4-2). Quel est le meilleur choix ? Bien justifier la réponse.

4. Intersections variables [1]

Soit la paire d'équations suivantes

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ (x-a)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

1. Question tirée de A. Arcavi (1994), Symbol sense : informal sense-making in formal mathematics, For the Learning of Mathematics. 14(3), 24-35.

où a est un nombre réel. Une solution de la paire d'équations est alors donnée par un couple, lequel est formé par une valeur de x et une valeur de y.

Pour quelles valeurs de a cette paire d'équations possède-t-elle

— 0 solution ?

— 1 solution ?

— 2 solutions ?

— 3 solutions ?

— 4 solutions ?

On doit bien justifier les réponses. Noter qu'il se peut que dans certains de ces cas aucune valeur de a ne donne le nombre de solutions demandées.

5. Un simple déplacement

Il est possible de démontrer que si on applique successivement des translations et des rotations dans le plan, alors on obtient un déplacement qui peut être donné soit par une seule translation, soit par une seule rotation, et ce, pour tous les points du plan (qui sont notés $P(x, y)$ en coordonnées cartésiennes).

On applique les trois déplacements suivants dans l'ordre indiqué :

— une translation de -1 en x ;

— une rotation de centre $(0, 0)$ de $90°$ en sens anti-horaire ;

— une translation de 2 en y.

Trouver en le justifiant la translation ou la rotation qui résulte de cette suite d'opérations.

6. L'aire d'une fleur

Une fleur contenant 8 pétales est symétrique sur 8 axes. De plus, ses pétales adjacents sont tangents les uns aux autres. Chaque pétale est constitué de deux arcs de cercle de rayon 1 cm. Quelle est l'aire de la fleur (l'aire de la zone grisée) ? Justifier.