Concours de l'Association mathématique du Québec
Niveau collégial

Le mercredi 11 février 2026

- Solutionnaire -

1. **La grosse division**

   Donner le reste de la division par 7 du nombre $999\,998\,997\ldots003\,002\,001$.

   SOLUTION :

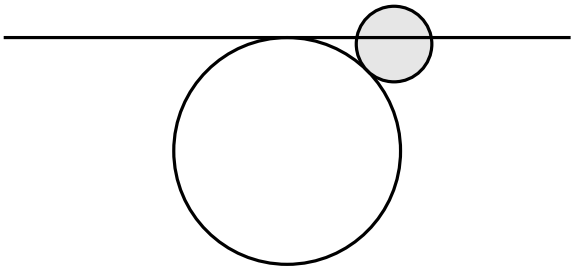
   Pour faciliter la lecture de la solution, nous utiliserons la notation $a \underset{7}{\equiv} b$ qui signifie que a et b ont le même reste de division par 7. Par exemple, on a $13 \underset{7}{\equiv} 6$, $36 \underset{7}{\equiv} 1$ et $1000 \underset{7}{\equiv} 6 \underset{7}{\equiv} -1$. On a donc

$$\begin{aligned}
999\,998\,997\ldots003\,002\,001 &= 999 \cdot 1000^{998} + 998 \cdot 1000^{997} + \ldots + 3 \cdot 1000^2 + 2 \cdot 1000^1 + 1 \\
&\underset{7}{\equiv} 999 \cdot (-1)^{998} + 998 \cdot (-1)^{997} + \ldots + 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)^1 + 1 \\
&= (999 - 998) + (997 - 996) + \ldots + (3 - 2) + 1 \\
&= 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 \\
&= 500 \\
&\underset{7}{\equiv} 3
\end{aligned}$$

   Le reste de division recherché est donc 3.

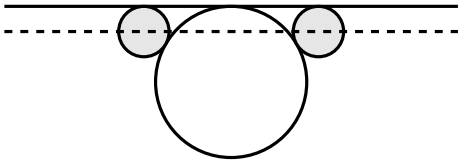
2. **L'horizon**

On trace deux disques tangents l'un à l'autre, comme sur le dessin. Le rayon du disque blanc est trois fois plus grand que le rayon du disque gris. On trace ensuite toutes les tangentes possibles au disque blanc. Quelle fraction de ces tangentes intersecte le disque gris ?

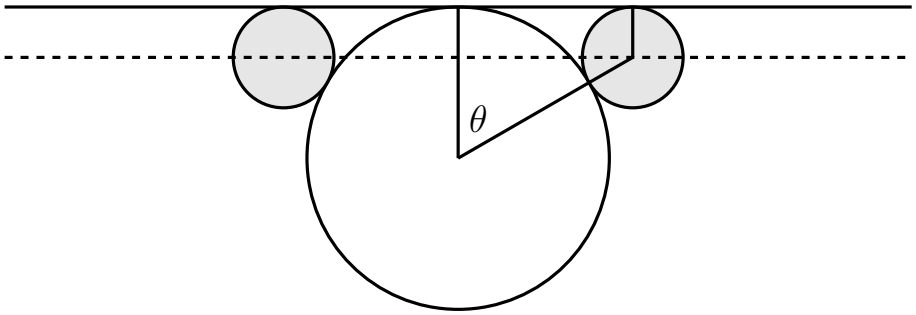


SOLUTION :

En reformulant la question, on peut dire que le problème est de trouver la proportion pour lequel le centre du disque gris est en haut de la ligne pointillée.



Si on rajoute les rayon, on trouve un triangle rectangle.



Si R_1 et R_2 sont les rayons des disques blan et gris respectivement, alors l'agle

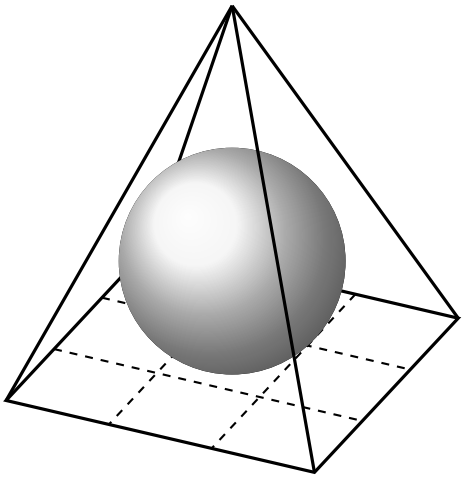
$$\cos(\theta) = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\theta = \pi/3$ et donc la proportion est

$$P = \frac{2\theta}{2\pi} = \frac{1}{3} = 33,\overline{3}\%.$$

3. **La sphère pyramidale**

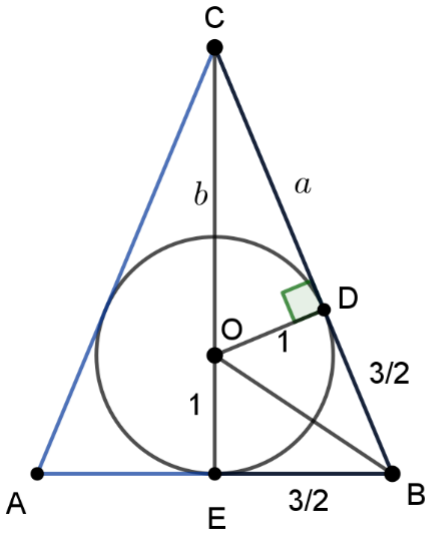
Soit une pyramide droite à base carrée dont la base est un carré 3 par 3. Une sphère de rayon 1 est tangente aux cinq faces de la pyramide. Quelle est la hauteur de la pyramide ?



SOLUTION :

Par symétrie, la sphère est tangente au centre du carré et sur les hauteurs (ou médianes) des quatre faces latérales.

Soit la coupe transversale qui coupe la base au centre. On pose C le sommet de la pyramide, A et B les points à l'intersection des faces latérales, de la base et de la coupe, O le centre de la sphère, E le point d'intersection entre la base et la sphère et D le point d'intersection de la sphère et de la face qui contient B.



Le triangle $\triangle OEB$ est congru au triangle $\triangle ODB$, car ce sont deux triangles rectangles partageant un côté, donc $m\overline{DB} = \frac{3}{2}$.

Posons $m\overline{OC} = b$ et $m\overline{DC} = a$. Par Pythagore, on a :

$$b^2 = a^2 + 1^2 \qquad \text{et} \qquad (b+1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(a + \frac{3}{2}\right)^2.$$

La deuxième équation devient :

$$b^2 + 2b + 1 + \frac{9}{4} = a^2 + 3a + \frac{9}{4}.$$

En substituant b^2 de la première équation, on a :

$$(a^2+1)+2b+1+\frac{9}{4}=a^2+3a+\frac{9}{4}.$$

Qui se simplifie par

$$b=\frac{3a}{2}-1.$$

En substituant dans la première équation, on a :

$$\left(\frac{3a}{2}-1\right)^2=a^2+1$$

et si on développe, on obtient :

$$5a^2-12a=0.$$

On élimine la valeur $a=0$, donc $a=\frac{12}{5}$, on trouve $b=\frac{13}{5}$. Donc la hauteur de la pyramide est $m\overline{EC}=1+b=\frac{18}{5}$ unités.

4. **Le jeu de Kenda**

Kenda a un jeu de cartes numérotées de 1 à n. Elle choisit une carte au hasard, la remet dans le paquet et brasse le paquet. Elle recommence ainsi jusqu'à avoir fait n piges. Soit P_n la probabilité que les n cartes pigées contiennent exactement $n-1$ numéros différents. Pour quelle valeur de n, la probabilité P_n est maximale ?

SOLUTION :

Le nombre de manières d'avoir seulement 2 nombres identiques est

$$\binom{n}{2} \times n \times (n-1) \times \cdots \times 2 = \binom{n}{2} \times n!.$$

Puisque il y a n^n possibilités de tirages différents, alors

$$P_n = \frac{n(n-1)}{2} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n-1)^2 (n-2)!}{2n^{n-2}}.$$

Pour déterminer le maximum de P_n, on peut d'abord calculer les premières valeurs de P_n.

n	P_n
2	1/2
3	2/3
4	9/16
5	48/125
$\vdots$	$\vdots$

Le tebleau nous donne l'intuition que le maximum de P_n est en $n = 3$. Pour le démontrer, on a que pour $n \geq 5$,

$$P_n = \frac{(n-1)^2 (n-2)!}{2n^{n-2}} = \frac{(n-1)^2}{n^2} \frac{(n-2)!}{n^{n-5}} \frac{1}{2n} \leq \frac{3!}{2n} \leq \frac{3}{5} \leq \frac{2}{3} = P_3.$$

Ainsi donc, P_n est maximal en $n = 3$.

5. **De cinq à zéro**

Soit la fonction f définie sur tous les entiers telle que pour tout couple d'entiers (m, n), on a :

$$2f(mn) + f(n-1) + 4n + 2m^2 = f(m)f(n) + f(1) + 1.$$

Trouver la valeur de $f(5)$ sachant que $f(0) = 1$.

SOLUTION :

Remplaçons m par 0. L'équation devient

$$2f(0) + f(n-1) + 4n = f(0)f(n) + f(1) + 1.$$

Substituons $f(0)$ par 1 selon l'hypothèse

$$\begin{aligned} 2 + f(n-1) + 4n &= f(n) + f(1) + 1, \\ f(n) &= f(n-1) + 4n + 1 - f(1). \end{aligned} \tag{1}$$

On remplace n par 1, on a

$$f(1) = f(0) + 4 + 1 - f(1).$$

Donc $2f(1) = 5 + f(0)$ et $f(1) = 3$. L'équation (1) devient :

$$f(n) = f(n-1) + 4n - 2. \tag{2}$$

Avec $f(1) = 3$, on trouve récursivement à partir de l'équation (2) les valeurs $f(2) = 9$, $f(3) = 19$, $f(4) = 33$ et $f(5) = 51$.

Note : On peut montrer que la fonction $f(n) = 2n^2 + 1$ satisfait la relation.

6. **Réflexion Logo-Expo**

Soit $k > 0$ une constante. Trouver la valeur de k pour laquelle l'équation

$$e^{kx} = \ln(x^{1/k})$$

n'a qu'une seule solution.

SOLUTION :

Soient

$$f(x) = e^{kx} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(x^{1/k}).$$

On peut d'abord remarquer que pour $x > 0$, ces deux fonctions sont l'inverse l'une de l'autre. (On peut ignorer le cas $x \leq 0$ car $g(x)$ n'est pas définie dans ce cas.) En effet,

$$g(f(x)) = x.$$

Ainsi donc, toutes solutions de l'équation originale se trouve, par symétrie, sur la droite d'équation $y = x$.[(1)] Nous pouvons donc seulement trouver les solutions telles que

$$e^{kx} = x.$$

On note

$$h(x) = e^{kx} - x.$$

Si x_0 est la solution unique de $h(x)$, alors

$$h(x_0) = e^{kx_0} - x_0 = 0, \tag{3}$$

$$h'(x_0) = ke^{kx_0} - 1 = 0. \tag{4}$$

En utilisant le l'égalité (3) dans (4), on trouve

$$x_0 = \frac{1}{k}.$$

En réutilisant (3), on trouve que $x_0 = e$ et donc que $k = 1/e$.

[(1)]**Note :** Cette affirmation n'est pas vraie en général, il suffit de prendre l'involution $i(x) = -x$ pour s'en convaincre. Cette fonction a la propriété que $i(i(x)) = x$ et que toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$ sont bien sûr solutions de $i(x) = i(x)$. Ces solutions ne sont pas toutes sur la droite $y = x$. Cela contredit ainsi la dite affirmation.

Pour être plus précis dans notre cas, il faut aussi prendre en compte que f est monotone croissante. En effet, supposons que l'équation $f(x) = g(x)$ a une solution x_0 qui n'est pas sur la droite $y = x$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(x_0) > x_0$. Ainsi,

$$g(x_0) = f(x_0) > x_0.$$

Puisque f est monotone croissante, alors

$$x_0 = f(g(x_0)) > f(x_0).$$

Cela nous donne une contradiction.