Concours de l'Association mathématique du Québec
Niveau collégial

Le mercredi 12 février 2025

- Solutionnaire -

1. **L'unité du plus grand**

   Le 12 octobre 2024, le plus grand nombre premier connu à ce jour a été découvert. Il s'agit du nombre

   $$2^{136\,279\,841} - 1.$$

   Donner le chiffre des unités de ce nombre.

   SOLUTION :

   Remarquons d'abord que $136\,279\,841 = 4k + 1$ pour une certaine valeur de k. On a ainsi

   $$2^{136\,279\,840} = (2^4)^k = (16)^k.$$

   Le chiffre des unités de cette dernière expression est de 6 de tel sorte que le chiffre des unités de $2^{136\,279\,841}$ est de 2, d'où le chiffre des unités de $2^{136\,279\,841} - 1$ est de 1.

2. **Aire = périmètre**

Démontrer que le triangle ayant des côtés de longueur 5, 12 et 13 ainsi que le triangle ayant des côtés de longueur 6, 8 et 10 sont les deux seuls triangles rectangles avec des côtés de longueur entière dont la valeur du périmètre en unités est égale à la valeur de la surface en unités carrées.

SOLUTION :

Soit a et b les longueurs des cathètes d'un triangle rectangle ayant une hypoténuse de longueur c. On a

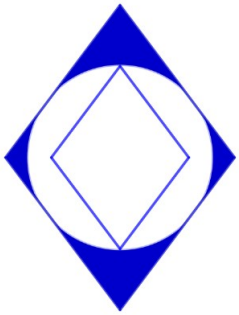
$$\begin{aligned} ab/2 &= a+b+c \\ ab-2a-2b &= 2c \\ (ab-2a-2b)^2 &= 4c^2 \\ a^2b^2+4a^2+4b^2-4a^2b-4ab^2+8ab &= 4a^2+4b^2 \\ a^2b^2-4a^2b-4ab^2+8ab &= 0 \\ ab(ab-4a-4b+8) &= 0 \\ (a-4)(b-4) &= 8 \end{aligned}$$

Les seules solutions entières à la dernière équation sont

$$(a,b) = (5,12), (12,5), (6,8) \text{ et } (8,6).$$

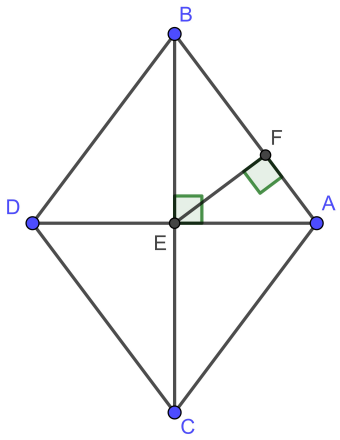
3. **Le petit losange**

Dans un losange dont les diagonales sont de longueur 15 et 20, il y un cercle inscrit. Dans le cercle, il y a un losange inscrit semblable au premier. Calculer la surface du petit losange.



SOLUTION :

Posons les points selon ce dessin du grand losange.



Selon l'énoncé, on a $mAE = \frac{15}{2}$, $mEB = 10$

Par Pythagore, $mAB = \frac{25}{2}$.

Soit F sur AB tel que EF est perpendiculaire à AB.

Par des triangles semblables, on trouve que :

$$\frac{mEF}{mEA} = \frac{mEB}{mBA}.$$

Donc :

$$\frac{mEF}{\frac{15}{2}} = \frac{10}{\frac{25}{2}}.$$

On trouve que $mEF = 6$. Donc le rayon du cercle est 6.

La grande diagonale du petit losange est égale au diamètre du cercle : 12.

La petite diagonale par des calculs de proportions est : $12 \times \frac{15}{20} = 9$.

L'aire du petit losange est :

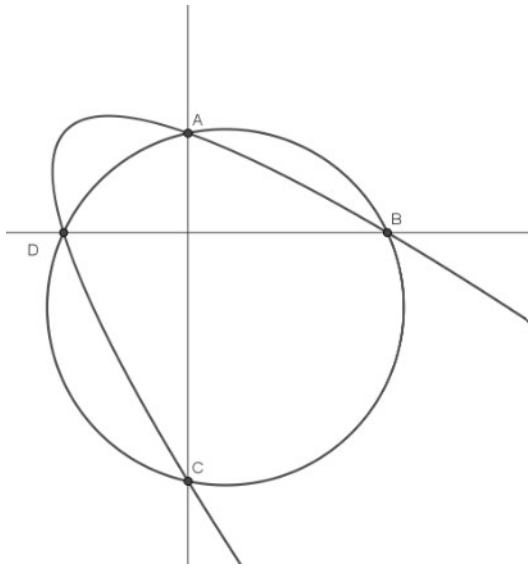
$$A = \frac{Dd}{2} = \frac{12 \times 9}{2} = 54u^2.$$

4. **La parabole qui a un penchant pour un cercle**

Soit la parabole penchée d'équation

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 - 3x + 6y = 20.$$

Trouver l'équation du cercle qui passe par les 4 points d'intersection entre la parabole et les deux axes (A, B, C, D sur le dessin).



SOLUTION :

Trouvons les quatre points d'intersection. Posons $x = 0$.

$$2y^2 + 6y - 20 = 0$$

$$2(y + 5)(y - 2) = 0$$

On trouve $A(0, 2)$, $C(0, -5)$.

Posons $y = 0$.

$$2x^2 - 3x - 20 = 0$$

$$(2x + 5)(x - 4) = 0$$

On trouve $B(4, 0)$, $D(-\frac{5}{2}, 0)$.

Si un cercle passe par les quatre points, alors l'abscisse de son centre est le milieu de $-\frac{5}{2}$ et 4, soit $\frac{3}{4}$ et l'ordonnée du centre du cercle est le milieu de 2 et -5, soit $-\frac{3}{2}$. Posons $O(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2})$, le centre du cercle. Il ne reste qu'à calculer la distance, entre un point sur le cercle et le centre du cercle pour trouver le rayon.

$$mOA = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(2 + \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{205}}{4}$$

Donc l'équation du cercle est :

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{205}{16}$$

5. **Dérivée inversée**

Soit la fonction inversible $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3$. Calculer

(a) $f^{-1}(0)$;

(b) $\dfrac{d\,(f^{-1})}{dx}(0)$;

(c) $\dfrac{d\,(f^{-1})}{dx}(6)$;

(d) $\dfrac{d^2\,(f^{-1})}{dx^2}(6)$.

SOLUTION :

L'astuce ici n'est pas d'inverser la fonction, mais de remarquer que

$$f^{-1}(f(x)) = x. \tag{1}$$

a) Si on prend $x = 0$, alors

$$f^{-1}(0) = 0.$$

b) Si on dérive l'expression (1), on trouve

$$\frac{d\,(f^{-1})}{dx}\,(f(x)) \cdot f'(x) = 1. \tag{2}$$

En prenant $x = 0$, on trouve

$$\frac{d\,(f^{-1})}{dx}\,(0) = 1.$$

c) On remarque que $f(1) = 6$. Si on prend $x = 1$ dans (2), on obtient

$$\frac{d\,(f^{-1})}{dx}\,(6) = \frac{1}{14}.$$

d) Si on dérive (2), on obtient

$$\frac{d^2\,(f^{-1})}{d^2x}\,(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + \frac{d\,(f^{-1})}{dx}\,(f(x)) \cdot f''(x) = 0. \tag{3}$$

Si on prend $x = 1$ dans (3), on obtient

$$\frac{d^2\,(f^{-1})}{d^2x}\,(6) \cdot (14)^2 + \frac{d\,(f^{-1})}{dx}\,(6) \cdot 22 = 0.$$

On utilise la valeur obtenue en c) pour remplacer le terme avec la dérivée première et on trouve

$$\frac{d^2\,(f^{-1})}{d^2x}\,(6) = -\frac{22}{14^3} = -\frac{11}{1372}.$$

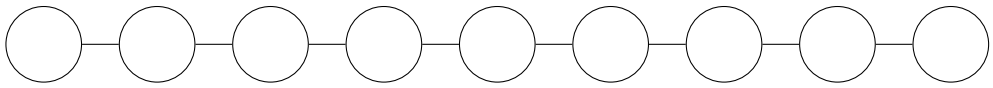
6. **Les Pixels de Mathville**

Les 9 joueurs d'une équipe de baseball sont assis autour d'une table ronde. On leur apporte 9 casquettes : 3 rouges, 3 vertes et 3 bleues. On distribue les casquettes de sorte que chaque joueur ait une casquette d'une couleur différente de celle de ses deux voisins. Calculer le nombre de manières de distribuer les casquettes aux 9 joueurs.

SOLUTION :

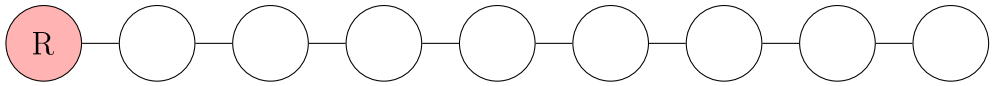
Il est à noter qu'il y a plusieurs façons de compter le nombre de manières de placer les casquettes. Nous expliquons une stratégie de résolution, mais bien d'autres sont possibles.

Premièrement, dans ce qui suit, nous allons représenter les 9 joueurs par une chaîne de cercles comme ci-dessous.



Tous les joueurs reliés par un trait sont voisins. Il en va de même pour les deux joueurs aux deux bouts de la chaîne.

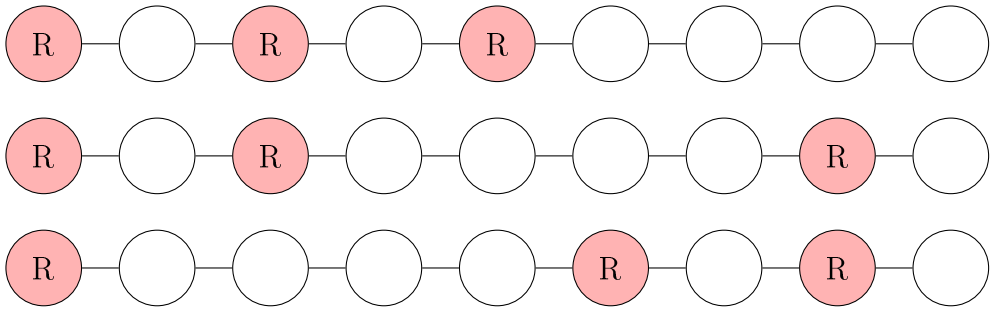
Sans perte de généralité, on peut fixer le premier cercle en rouge. Il suffira de multiplier par 3 le résultat trouvé.



On sépare maintenant en catégories la manière de placer les deux autres casquettes rouges.

Catégorie 1-1-4

Dans cette catégorie, entre deux casquettes rouge, on a soit 1 ou 4 casquettes de d'autres couleurs. On a 3 possibilités avant de placer les autres casquettes.

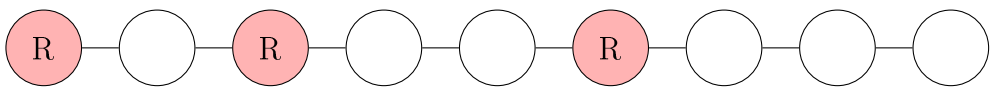


Pour chacun de ces 3 cas, on doit placer les casquettes bleues et vertes. On peut remarquer que dans le groupe de 4, on a deux possibilités. Soit Vert-Bleu-Vert-Bleu ou bien Bleu-Vert-Bleu-Vert. De même, dans les deux groupes de 1 casquettes, on peut placer Vert-Bleu ou bien Bleu-Vert.

Cela nous fait un nombre de possibilités de $3 \times 2 \times 2 = 12$.

Catégorie 1-2-3

Dans cette catégorie, entre deux casquettes rouge, on a soit 1, 2 ou 3 casquettes de d'autres couleurs. On a 6 possibilités de base avant de placer les autres casquettes.



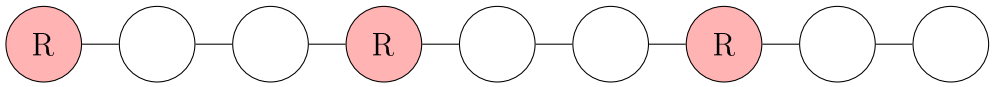
Il y a 6 possibilités, contrairement à la catégorie 1-1-4, car ici, on peut aussi inverser la direction du placement des casquettes rouges (de droite à gauche ainsi que de gauche à droite).

Pour chacun de ces 6 cas, on doit placer les casquettes bleues et vertes. On peut remarquer que dans le groupe de 2, on a deux possibilités. Soit Vert-Bleu ou bien Bleu-Vert. De même, dans le groupe de trois casquettes, on peut placer Vert-Bleu-Vert ou bien Bleu-Vert-Bleu (le groupe d'un élément prendra la casquette restante).

Cela nous fait un nombre de possibilités de $6 \times 2 \times 2 = 24$.

Catégorie 2-2-2

Enfin, dans cette catégorie, entre deux casquettes rouge, on a 2 casquettes de d'autres couleurs. On a une seule possibilité de base avant de placer les autres casquettes.



On doit placer les casquettes bleues et vertes. On peut remarquer que dans chaque groupe de 2, on a deux possibilités. Soit Vert-Bleu ou bien Bleu-Vert.

Cela nous fait un nombre de possibilités de $1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Sommation

En additionnant les 3 catégories et en multipliant par 3 comme indiqué au début, on trouve

$$3 \times (12 + 24 + 8) = 132.$$