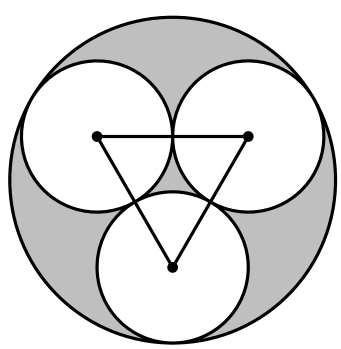
Concours de l'Association mathématique du Québec
Niveau collégial
SOLUTIONS

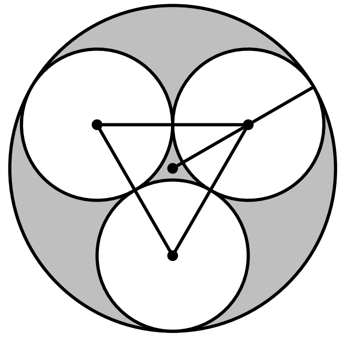
1. **Les six doigts de la main**
   Tout nombre n est de la forme
   $$6k, \quad 6k+1, \quad 6k+2, \quad 6k+3, \quad 6k+4 \quad \text{ou} \quad 6k+5.$$
   Comme n est un nombre premier supérieur à 3, on a
   $$n \neq 6k, \quad n \neq 6k+2 = 2(3k+1), \quad n \neq 6k+3 = 3(2k+1) \quad \text{et} \quad n \neq 6k+4 = 2(3k+2).$$
   Il ne reste donc que $n = 6k+1$ et $n = 6k+5 = 6(k+1)-1$.

2. **Les chocolats**
   On pose S le nombre de saveurs disponible. On a 4 chocolats, donc on a 3 endroits où les chocolats se touchent. Puisque la probabilité que 2 chocolats n'aient pas la même saveur est de $\frac{S-1}{S}$, alors la probabilité qu'aucun chocolat qui se touchent n'ait la même saveur est
   $$P = \left(\frac{S-1}{S}\right)^3.$$
   On veut que P soit plus grand que 51.2%. On a
   $$\begin{aligned} P &\geq 51.2\%, \\ \left(\frac{S-1}{S}\right)^3 &\geq \frac{64}{125}, \\ 1-\frac{1}{S} &\geq \frac{4}{5}, \\ S &\geq 5. \end{aligned}$$
   Ainsi, il faut au moins 5 saveurs de chocolat.

3. **Les trois cercles de Benoît**
   On veut d'abord trouver le rayon du grand cercle. Pour ce faire, on construit d'abord le triangle passant par le centre des trois cercles.



   Ce triangle est équilatéral de côté 2. La hauteur du triangle est donc de $h = \sqrt{3}$. Puise que le centre du triangle est au 2/3 des hauteur, on trouve le rayon R du grand cercle est de
   $$R = \frac{2}{3}h + 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1.$$



Pour calculer l'aire de la région grisée, on peut soustraire l'aire des trois petits cercles de l'aire du cercle circonscrit

$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 - 3\pi \\ &= \pi\left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1\right)^2 - 3\right] \\ &= \frac{\pi}{3}\left[4\sqrt{3}-2\right]. \end{aligned}$$

4. **Palindrome**

La preuve découle essentiellement de la propriété suivante pour les nombres divisibles par 11 :

Un nombre est divisible par 11 *si la somme alternée de ses chiffres donne un nombre divisible par* 11.

On donne la preuve de cette propriété. Puisque $10 \equiv -1 \mod 11$, il suit que $10^k \equiv (-1)^k \mod 11$. Ainsi, pour un nombre n de N chiffres écrit sous la forme $n = \sum_{k=0}^{N+1} d_k 10^k$ avec $0 \leq d_k \leq 9$ pour tout $0 \leq k \leq N+1$. En prenant le reste modulo 11, on obtient

$$\begin{aligned} n \mod 11 &= \left(\sum_{k=0}^{N+1} d_k 10^k\right) \mod 11 \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} d_k 10^k \mod 11 \\ &= \sum_{k=0}^{N+1} d_k (-1)^k \mod 11 \end{aligned}$$

Donc, si la somme alternée des chiffres est divisible par 11, le nombre l'est aussi. Dans le cas d'un palindrome ayant un nombre pair de chiffres, cette somme alternée est nécessairement 0. Le premier chiffre est égal au dernier, et dans la somme alternée ceux-ci ont un signe opposé. La même chose est vraie pour le deuxième et l'avant-dernier et ainsi de suite, jusqu'au centre du nombre.

5. **La super fonction**

(a) En prenant $x = y = 0$ dans l'équation on a

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) + 0 + 0$$

ce qui implique $f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$.

(b) On a

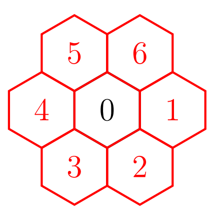
$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} \\
&= 1, \text{ par hypothèse}
\end{aligned}$$

(c) On a

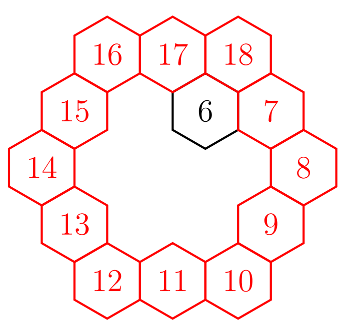
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+x^2h+xh^2-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)+x^2h+xh^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{h(x^2+xh)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to 0}(x^2+xh) \\
&= 1+x^2
\end{aligned}$$

(d) On a $f(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+C$, mais comme $f(0)=0$, $f(x)=x+\dfrac{x^3}{3}$.

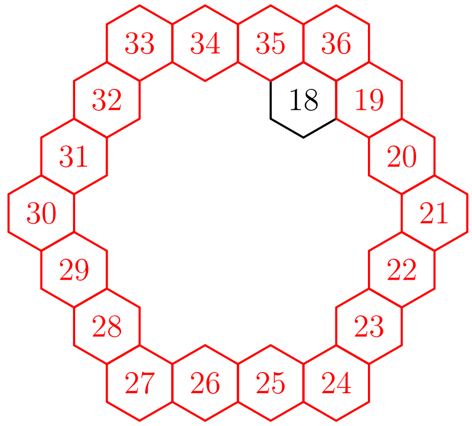
6. **La spirale de l'année**
Pour bien comprendre le comportement de la spirale, on note chaque couche d'hexagones par un numéro noté R.
Couche $R=1$:



Couche $R=2$:



Couche $R=3$:



On remarque que la couche R possède $6R$ nombres. On peut ainsi calculer le dernier nombre de la couche R que l'on note n_R :

$$n_R = \sum_{k=1}^{R} 6k = 6\frac{R(R+1)}{2} = 3R(R+1).$$

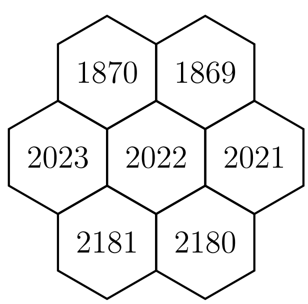
Comme on le voit sur les images. On a $n_1 = 6$, $n_2 = 18$ et $n_3 = 36$. Pour trouver dans quelle couche le nombre 2022 se retrouve, on calcule n_R pour quelques R bien choisis.

R	n_R
24	1800
25	1950
26	2106
27	2268

On a donc que le nombre 2022 est dans la couche $R = 26$.
Pour trouver dans quel des 6 sextants («quadrants», mais pour 6 divisions) se retrouve notre nombre, on peut partir de 1950 et additionner 26 jusqu'à dépasser 2022. Puisqu'on va avoir besoin aussi des nombres autour de 2022, il faut aussi regarder les couches $R = 25$ et $R = 27$.
Le tableau suivant donne le premier nombre de chaque sextant pour les 3 couches. Attention, pour le premier sextant, on y place le dernier nombre de la couche précédente. On a écrit la couche $R = 3$ pour bien voir ce qui se passe.

sextant	$R = 3$	$R = 25$	$R = 26$	$R = 27$
1	18	1800	1950	2106
2	21	1825	1976	2133
3	24	1850	2002	2160
4	27	1875	2028	2187

On a donc que le nombre 2022 est dans le sextant 3. Avec ces informations, il est possible d'interpoler le voisinage de l'hexagone 2022.



La somme est donc $f(2022) = 1869 + 1870 + 2021 + 2023 + 2180 + 2181 = 12144$.