Concours de l'Association mathématique du Québec
Niveau collégial

Le mercredi 14 février 2024

- Solutionnaire -

1. **Carrément carré !**

   On veut construire une grande salle carrée dont le plancher est complètement couvert de tuiles entières en forme de rectangles de dimension 46×88. Trouver la dimension minimale (non-nulle) de cette salle.

   Solution.

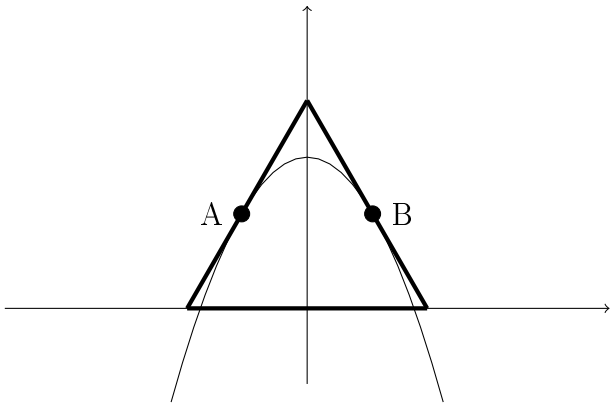
   Il faut placer les rectangles dans la même orientation pour pouvoir avoir un carré. La largeur du carré sera donc un multiple de 46 et de 88. Comme on recherche la dimension minimale, on veut le plus petit commun multiple.

   Puisque $46 = 2 \times 23$ et $88 = 2^3 \times 11$, alors le plus petit multiple est $2^3 \times 11 \times 23 = 2024$.

   La dimension minimale du carré est $2024^2 = 4096576$.

2. **Tangence équilatérale**

   Soit la fonction $f(x) = 1 - x^2$. Déterminer les deux points A et B tels que les tangentes au graphe forment un triangle équilatéral ayant une partie de l'axe des x comme base.



   Solution.

   La tangente qui contient le point A fait un angle de $60°$ avec l'axe des x, car le triangle est équilatéral. Donc la pente de la tangente est $\tan(60°) = \sqrt{3}$.

   L'équation de la parabole est $y = 1 - x^2$, donc

$$\frac{dy}{dx} = -2x.$$

   Ainsi la valeur de x pour que la pente de la tangente soit $\sqrt{3}$ est $x_0 = -\sqrt{3}/2$. La coordonnée du point A est donnée par $f(x_0)$. Donc les coordonnées de A sont

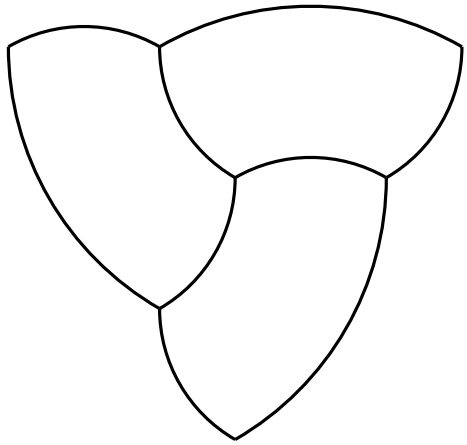
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Par symétrie, les coordonnées de B sont

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

3. **Le bouclier**

Un bouclier est formé de trois parties identiques qui s'emboîtent les unes dans les autres parfaitement. Les courbes sur le bouclier sont des arcs de cercles. Les petits arcs de cercles sont tous identiques et proviennent de cercles de rayon 1. Il en est de même pour les grands arcs de cercles qui eux proviennent de cercles de rayon 2. Chacune des trois parties du bouclier est symétrique par rapport à un axe. Quelle est l'aire totale du bouclier ?



Note du comité.

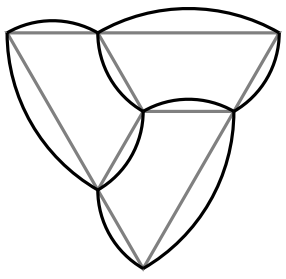
Ce problème était malheureusement mal défini et avait une infinité de solutions. Merci à François Lamontagne, du cégep du Vieux Montréal, de nous avoir prévenu rapidement de la situation. Il est à noter que nous avons considéré cet élément durant la correction du concours.

Si on rajoute l'hypothèse que, dans chaque section du bouclier, les arcs de cercles opposés sont liés à des cercles de même centre, alors le problème est bien défini est l'aire est

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

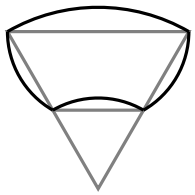
Solution.

On trace les cordes de chaque arc de cercle. Par symétrie de la figure, l'angle entre les cordes du centre est de $2\pi/3$.

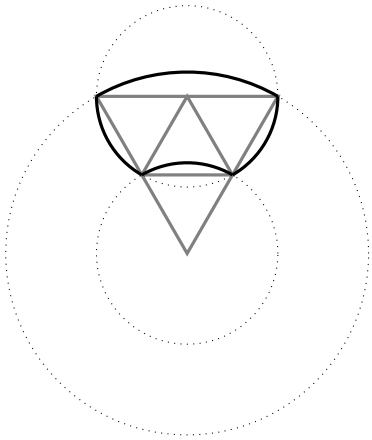


Si on extrait l'une des trois parties et qu'on prolonge les deux cordes des côtés, on a un triangle. Puisque la partie de bouclier est symétrique sur la hauteur, alors

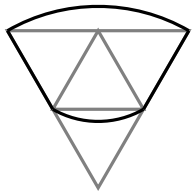
le triangle est aussi symétrique sur la hauteur. On peut en déduire que le triangle est équilatéral et les petits segments sont tous de même grandeur.



En ajoutant l'hypothèse supplémentaire notée plus haut, on peut montrer que le grand triangle est de côté 2.



On bouge les petites sections de cercles pour obtenir la figure suivante.



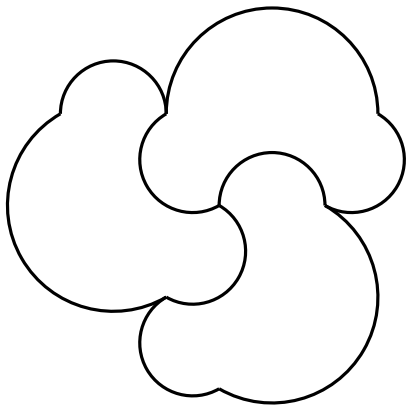
L'aire de la région peut être calculée en additionnant l'aire de la grande section de cercle plus la petite section de cercle moins deux petits triangles

$$A_r = \frac{1}{6}\pi 2^2 + \frac{1}{6}\pi - 2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On obtient finalement l'aire totale du bouclier en additionnant les trois régions

$$A = 3A_r = \frac{5\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dans le cas général, sans l'ajout de l'hypothèse supplémentaire, nous pouvons montrer que le bouclier peut acoir plusieurs formes. Par exemple, sur l'image suivante, on en montre une extravagante, mais valide.



4. **Degré ou gradian**

Laurent fait un devoir de trigonométrie dans lequel il doit utiliser sa calculatrice pour calculer le sinus d'un certain angle a, en degrés, compris entre 0 et 360 degrés inclusivement. Laurent ne s'est pas rendu compte que sa calculatrice n'était pas en degrés mais en gradian (il y a 100 gradians dans un angle droit). Pourtant, il a quand même obtenu la bonne réponse. Quelle était la valeur de l'angle a, en degrés ? Trouver toutes les possibilités.

Solution.

Notons $\sin^\circ(x)$ la fonction qui calcule le sinus de x degrés.

Soit a l'angle en degrés dont on cherchait le sinus. Laurent voulait calculer $\sin^\circ(a)$ mais en fait, il a calculé $\sin^\circ(9a/10)$ puisque a grades correspondent à $9a/10$ degrés. On cherche donc les solutions de l'équation

$$\sin^\circ(a) = \sin^\circ(9a/10) \quad \text{pour } 0 \leq a \leq 360.$$

Clairement $\boxed{a = 0}$ est une solution.

Si maintenant $a > 0$, alors l'angle $9a/10$ est plus petit que l'angle a. Pour que ces deux angles aient le même sinus, il faut que a soit dans le deuxième quadrant (et alors $9a/10$ est dans le premier quadrant) ou bien que a soit dans le quatrième quadrant (et alors $9a/10$ est dans le troisième).

— Possibilité 1 : a est dans le deuxième quadrant et $9a/10$ est dans le premier quadrant. Pour que ces deux angles aient le même sinus, il faut que $9a/10$ soit égal à $180 - a$. On résout :

$$\frac{9a}{10} = 180 - a \implies 9a = 1800 - 10a \implies \boxed{a = \frac{1800}{19}}$$

qui est bien dans le deuxième quadrant parce que $1800/20 < 1800/19 < 1800/10$.

— Possibilité 2 : a est dans le quatrième quadrant et $9a/10$ est dans le troisième quadrant. Pour que ces deux angles aient le même sinus, il faut que $9a/10$ soit égal à $180 + (360 - a)$. On résout :

$$\frac{9a}{10} = 180 + (360 - a) \implies 9a = 5400 - 10a \implies \boxed{a = \frac{5400}{19}}$$

qui est bien dans le quatrième quadrant puisque $5400/20 < 5400/19 < 5400/15$.

On a donc trouvé les trois solutions $a = 0$, $a = 1800/19$ et $a = 5400/19$ degrés.

5. **Dés-duction**

Soit D_n ($n \geq 1$) un dé ayant n faces avec les nombres $0, 1, \ldots, n-1$. Si on tire le dé, on a autant de chance d'obtenir chacun de ces nombres. On tire les dés de la manière suivante. On tire d'abord D_n. Si on tombe sur 0, on arrête le processus, sinon on relance le dé D_k où k est la valeur obtenue au tirage précédent. Ce processus est répété tant qu'on ne tombe pas sur 0. Si on fait la somme de tous les nombres obtenus de cette manière, quelle est la valeur attendue, en moyenne, si on commence par tirer D_6 ?

Solution.

Soit N_n la moyenne recherchée. On a que $N_1 = 0$, car si on tire D_1, on ne peut trouver que le chiffre 0.

Dans le cas général, on a

$$\begin{aligned} N_n &= \frac{0}{n} + \frac{1+N_1}{n} + \frac{2+N_2}{n} + \ldots + \frac{n-1+N_{n-1}}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(k+N_k) \\ &= \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} N_k. \end{aligned}$$

Pour simplifier l'équation précédente, on regarde N_{n-1},

$$N_{n-1} = \frac{n-2}{2} + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-2} N_k.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n-2} N_k = (n-1)\left(N_{n-1} - \frac{n-2}{2}\right).$$

On peut remplacer cette identitée dans l'équation de N_n,

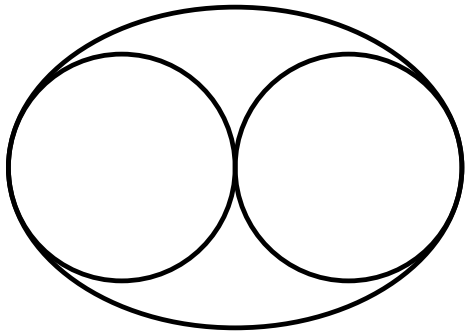
$$\begin{aligned}
N_n &= \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} N_k \\
&= \frac{n-1}{2} + \frac{N_{n-1}}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} N_k \\
&= \frac{n-1}{2} + \frac{N_{n-1}}{n} + \frac{1}{n}\left((n-1)\left(N_{n-1} - \frac{n-2}{2}\right)\right) \\
&= N_{n-1} + 1 - \frac{1}{n} \\
&= N_{n-2} + 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \\
&= \cdots \\
&= N_1 + (n-1) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Pour trouver la moyenne, il suffit de calculer la valeur

$$N_6 = 6 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{71}{20}.$$

6. **Enlipsé**

On place deux cercles de rayon 1 côte à côte. Ensuite, on encapsule ces deux cercles avec la plus petite ellipse de longueur 4 possible. L'ellipse ne touche pas aux cercles sauf à ses deux bouts. Quelle est la largeur de l'ellipse ?



Solution.

Soit $a > 0$ la demie épaisseur de l'ellipse. Alors son équation est

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1.$$

L'équation du cercle de droite est tant qu'à lui

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

On cherche la valeur mininale de a pour laquelle les deux équations ont une et une seule solution. Si on remplace y dans la première équation en utilisant la seconde, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1-(x-1)^2}{a^2} = 1 \\
\Longrightarrow\ &\frac{x^2}{4} + \frac{-x^2+2x}{a^2} = 1 \\
\Longrightarrow\ &a^2x^2 - 4x^2 + 8x = 4a^2 \\
\Longrightarrow\ &(a^2-4)x^2 + 8x - 4a^2 = 0.
\end{aligned}$$

Si $a = 2$, on trouve la seule solution $x = 2$. Cependant, cela ne veut pas dire que c'est la seule solution possible.

Dans le cas où $a \neq 2$, cette équation possède au plus deux solutions en x :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(a^2-4)(-4a^2)}}{2(a^2-4)} \\
\Longrightarrow x &= \frac{-8 \pm \sqrt{16\left(a^2-2\right)^2}}{2(a^2-4)} \\
\Longrightarrow x &= \frac{-8 \pm 4a^2 \mp 8}{2(a^2-4)}.
\end{aligned}$$

La valeur $x = 2$ est toujours solution de l'équation précédente. L'autre solution est,

$$x = \frac{-2a^2}{a^2-4}.$$

L'ellipse est la plus petite possible lorsqu'on ne trouve pas d'autre solution dans l'intervalle $[0, 2]$ autre que la solution $x = 2$. On remplace alors x par 2 dans l'équation :

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{-2a^2}{a^2-4} \\
\Longrightarrow\ &2a^2 - 8 = -2a^2 \\
\Longrightarrow\ &4a^2 = 8 \\
\Longrightarrow\ &a^2 = 2 \\
\Longrightarrow\ &a = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Puisque $\sqrt{2}$ est plus petit que 2 (la solution trouvée précédément pour a) alors $\sqrt{2}$ est notre valeur minimale. Donc, l'épaisseur de l'ellipse est $2a = 2\sqrt{2}$.