Solution du Concours de l'AMQ (volet collégial) - Édition 2023

1) Croisement médian

Montrer que les tangentes à la parabole $y = ax^2 + bx + c$ en deux points d'abscisse quelconque p et q s'intersectent en un point dont l'abscisse est $\dfrac{p+q}{2}$ (le point milieu entre p et q).

Solution.

On note la parabole par $f(x) = ax^2 + bx + c$. L'équation des tangentes à f en $x = p$ et en $x = q$ est respectivement

$$y = f'(p)(x-p) + f(p) = (2ap+b)(x-p) + ap^2 + bp + c$$

et

$$y = (2aq+b)(x-q) + aq^2 + bq + c.$$

En égalisant les deux équations, on trouve

$$\begin{aligned}
(2ap+b)(x-p) + ap^2 + bp + c &= (2aq+b)(x-q) + aq^2 + bq + c \\
2apx - 2ap^2 + bx - bp + ap^2 + bp + c &= 2aqx - 2aq^2 + bx - bq + aq^2 + bq + c \\
2apx - ap^2 &= 2aqx - aq^2 \\
(2ap - 2aq)x &= ap^2 - aq^2 \\
x &= \frac{ap^2 - aq^2}{2ap - 2aq} = \frac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

La dernière simplification est possible car $p \neq q$.

2) Parallélogramme

Anik a deux bâtons bleus de même longueur ainsi que deux bâtons rouges de même longueur. Elle forme un parallélogramme avec un angle de 75°. Elle remarque que la somme des longueurs au carré de ses diagonales est de 98. Ensuite, elle forme un rectangle avec ses 4 bâtons. Quelle est la longueur de la diagonale de ce rectangle ?

Solution.

On note par x et y les longueurs des bâtons bleus et des bâtons rouge respectivement. De plus, on note par a et b les longueurs des diagonales du parallélogramme. En utilisant la loi des cosinus, on trouve

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(75°)$$

et

$$b^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(105°) = x^2 + y^2 + 2xy\cos(75°).$$

Donc,

$$a^2 + b^2 = 2(x^2 + y^2) = 98 \Rightarrow x^2 + y^2 = 49 = z^2 \Rightarrow z = 7.$$

3) Le lièvre et la tortue

Le lièvre et la tortue font une course. Ils partent au même moment de la ligne de départ.

La tortue a une vitesse constante de 1.5 km/h tandis que la vitesse du lièvre (en km/h) en fonction du temps (en heures) est un polynôme de degré 2 de la forme $t^2 + bt + c$ (où b et c sont des constantes à déterminer). La vitesse du lièvre au départ et à l'arrivée est de 5 km/h et de 10 km/h respectivement. Contre toute attente, les deux participants arrivent au même moment à la ligne d'arrivée.

Combien de kilomètres la tortue a-t-elle parcourus ?

Solution.

On dénote respectivement par $f(t)$ et $g(t)$ les positions de la tortue et du lièvre en fonction du temps.

On supposant que la course a commencé à $t = 0$ et qu'elle finie à $t = t_0$, on peut déduire plusieurs équations. Pour la tortue,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{3}{2}, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Pour le lièvre,

$$\begin{aligned} g'(t) &= t^2 + bt + c, \\ g'(0) &= 5, \\ g'(t_0) &= 10, \\ g(0) &= 0. \end{aligned}$$

Pour les deux animaux ensemble,

$$f(t_0) = g(t_0). \tag{1}$$

Par les deux équations de la tortue, on a

$$f(t) = \frac{3}{2}t.$$

Par les trois premières équations du lièvre, on peut reformuler l'équation de degré 2 par

$$g'(t) = t^2 + \frac{5 - t_0^2}{t_0}t + 5.$$

Avec la quatrième égalité, on a

$$g(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{5 - t_0^2}{2t_0}t^2 + 5t.$$

Par l'égalité (1),

$$\begin{aligned} & f(t_0) = g(t_0) \\ \Rightarrow \quad & \frac{3}{2}t_0 = \frac{t_0^3}{3} + \frac{5 - t_0^2}{2}t_0 + 5t_0 \\ \Rightarrow \quad & 0 = -\frac{t_0^2}{6} + 6 \\ \Rightarrow \quad & t_0^2 = 36 \\ \Rightarrow \quad & t_0 = 6. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation de la position de la tortue, on trouve le nombre de km parcourus qui est

$$f(t_0) = 9.$$

Le calcul suivant n'est pas nécessaire pour résoudre le problème, mais il est tout de même pertinent de montrer que le lièvre ne traverse pas la ligne d'arrivée avant de revenir sur ses pas.

Le lièvre change de direction en t_1 lorsque

$$0 = g'(t_1) = t_1^2 + \frac{5 - t_0^2}{t_0} t_1 + 5 = t_1^2 - \frac{31}{6} t_1 + 5.$$

La plus petite solution à cette équation est

$$t_1 \approx 1,29.$$

La distance parcourue à ce temps là pour le lièvre est

$$g(t_1) = \frac{t_1^3}{3} - \frac{31}{12} t_1^2 + 5t_1 \approx 2.87 < 9.$$

4) La composition de l'année

Considérons la fonction polynomiale $f(x) = 2x^2 - 1$. Évaluer et simplifier autant que possible l'expression

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2023} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{2023}} \right) \right).$$

Rappel : $f \circ g(x)$ signifie $f(g(x))$, $f \circ g \circ h(x)$ signifie $f(g(h(x)))$, etc...

Solution.

De l'identité trigonométrique bien connue $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ (qui découle de $\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$ avec $A = B = \theta$ et de $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$) on observe que

$$f(\cos(\theta)) = \cos(2\theta).$$

En posant $\theta = \pi/2^{2023}$ on trouve successivement

$$\begin{aligned}
f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{2023}} \right) \right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2^{2022}} \right), \\
f \circ f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{2023}} \right) \right) &= f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{2022}} \right) \right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{2021}} \right), \\
&\vdots \\
\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{i \text{ lettres } f} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{2023}} \right) \right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2^{2023-i}} \right), \\
&\vdots \\
\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2023 \text{ lettres } f} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{2023}} \right) \right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2^{2023-2023}} \right) = \cos\left(\frac{\pi}{1} \right) = \cos(\pi) = -1.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'expression se simplifie au nombre -1.

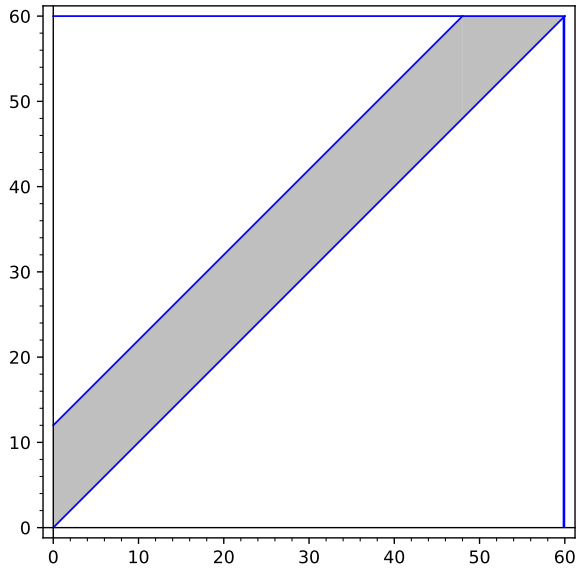
5) Monsieur Impatient

Chaque matin, monsieur Impatient se rend à l'arrêt d'autobus à un moment aléatoire entre 6 : 00 am et 7 : 00 am. Il attend 12 minutes et si l'autobus n'est toujours pas arrivé il se rend au travail en marchant. De son côté, l'autobus arrive aussi à un moment aléatoire entre 6 : 00 am et 7 : 00 am. Lors d'un matin donné, quelle est la probabilité que monsieur Impatient se rende au travail en autobus ?

Note : Les moments d'arrivés de Monsieur Impatient et de l'autobus sont uniformément distribués sur l'intervalle 6 : 00 *am à* 7 : 00 *am*

Solution.

Pour que monsieur Impatient quitte en autobus, ce dernier doit arriver au maximum douze minutes après monsieur Impatient. On peut représenter la situation dans un graphique comme celui ci-dessous.



L'axe des x représente la minute d'arrivée de monsieur Impatient à l'arrêt d'autobus tandis que l'axe des y est celui de l'autobus. (Par exemple, $x = 5$ indique que monsieur Impatient arrive à l'arrêt de bus à 6 : 05 am.)

Les droites $y = x$ et $y = x + 12$ sont représentées dans le carré 60×60 et la région où monsieur Impatient réussit à embarquer dans l'autobus est ombragée. La probabilité cherchée correspond au rapport entre l'aire de cette région (les heures d'arrivées étant uniformes) et l'aire du carré. On peut calculer l'aire de la région en soustrayant l'aire des deux triangles :

$$\frac{60 \times 60 - 1/260 \times 60 - 1/248 \times 48}{60 \times 60} = \frac{9}{50}.$$

6) Rien en commun

Donner le nombre d'entiers positifs inférieurs à $2023 = 7 \cdot 17^2$ qui n'ont pas de facteurs premier commun avec 2023.

Solution.

Comptons d'abord le nombre d'entiers inférieurs ou égal à 2023 qui ont un facteur commun avec 2023. Nous avons tous les multiples de 7 :

$$7 \cdot 1, 7 \cdot 2, \ldots, 7 \cdot (17^2) \quad \text{soit } 17^2 = 289 \text{ entiers},$$

tous les multiples de 17 :

$$17 \cdot 1, 17 \cdot 2, \ldots, 17 \cdot (7 \cdot 17) \quad \text{soit } 7 \cdot 17 = 119 \text{ entiers},$$

mais nous devons enlever tous les multiples de $7 \cdot 17 = 119$, car nous venons de les compter deux fois,

$$119 \cdot 1, 119 \cdot 2, \ldots, 119 \cdot 17 \quad \text{soit } 17 \text{ entiers}.$$

Nous avons donc un total de $289 + 119 - 17 = 381$ entiers inférieurs au égal à 2023 qui ont un facteur commun avec 2023.

La réponse que l'on cherche est donc $2023 - 381 = 1642$.