Concours collégial de l'AMQ 2021

1. Fractions de rêves La simplification

$$\frac{1\not{9}}{\not{9}4} = \frac{1}{4}$$

est évidemment fausse, mais dans ce cas-ci elle fonctionne. Trouver toutes les autres fractions avec des numérateurs et dénominateurs entre 10 et 99 inclusivement qui ont la même propriété, c'est à dire que la simplification de l'unité du numérateur avec la dizaine du dénominateur donne une fraction équivalente.

2. Factorielle de l'année

Soit $x_0 = 2021! = 2021 \cdot 2020 \cdot 2019 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Considérons la suite

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{la somme des chiffres de } x_0 \\ x_2 &= \text{la somme des chiffres de } x_1 \\ x_3 &= \text{la somme des chiffres de } x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

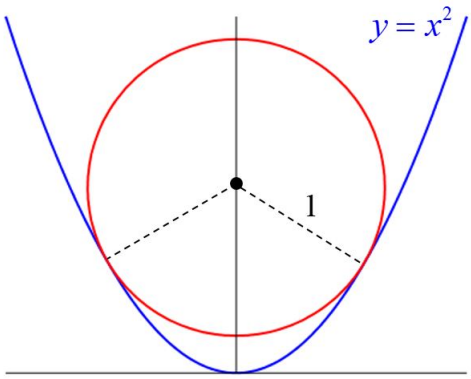
1. Cette suite devient éventuellement constante. Déterminer la valeur de cette constante.
2. Donner la valeur de x_3.

3. Dodécagone mélangé Un dodécagone inscrit dans un cercle possède six côtés de longueur a et six de longueur b, dans un ordre quelconque. Soit C un sommet adjacent à un côté AC de longueur a et à un côté CB de longueur b. Évaluer l'angle ACB.

4. Pile ou face Émilie et Christian jouent à "Pile ou Face". Pour rendre le jeu plus intéressant, ils décident de modifier la règle de la façon suivante : chacun doit choisir une combinaison de trois résultats (Pile, Face, Face, par exemple). Les deux combinaisons doivent être différentes. Ils lancent la pièce plusieurs fois et le premier qui voit sa combinaison apparaître dans trois lancers consécutifs remporte la partie. En supposant qu'Émilie choisit Face, Pile, Pile, quelle combinaison Christian doit-il choisir pour maximiser ses chances de gagner ? Quelle est alors sa probabilité de gagner ?

5. Cercle parabolique

Déterminer les coordonnées du centre du cercle dans la figure.



6. L'année des copains

On a $2021 = 43 \cdot 47$. Les nombres premiers 43 et 47 sont appelés des nombres premiers copains parce qu'ils diffèrent de 4. Voici le début de la liste des paires de nombres premiers copains :

$$(3,7),\ (7,11),\ (13,17),\ (19,23),\ (37,41),\ (43,47),\ldots.$$

Montrer que le seul nombre premier qui appartient à deux paires de nombres premiers copains est 7.