Association
mathématique
du Québec

Concours de l'AMQ, niveau collégial 2023

Questions de l'édition 2023 du concours de l'AMQ, édition niveau collégial.
L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.

1. Croisement médian. Montrer que les tangentes à la parabole $y = ax^2 + bx + c$ en deux points d'abscisse quelconque p et q s'intersectent en un point dont l'abscisse est $\dfrac{p+q}{2}$ (le point milieu entre p et q).

2. Parallélogramme. Anik a deux bâtons bleus de même longueur ainsi que deux bâtons rouges de même longueur. Elle forme un parallélogramme avec un angle de $75°$. Elle remarque que la somme des carrés des longueurs de ses diagonales est de 98. Ensuite, elle forme un rectangle avec ses 4 bâtons. Quelle est la longueur de la diagonale de ce rectangle ?

3. Le lièvre et la tortue. Le lièvre et la tortue font une course. Ils partent au même moment de la ligne de départ.

La tortue a une vitesse constante de $1.5\,{}^{\text{km}}/_{\text{h}}$ tandis que la vitesse du lièvre (en ${}^{\text{km}}/_{\text{h}}$) en fonction du temps (en heures) est un polynôme de degré 2 de la forme $t^2 + bt + c$ (où b et c sont des constantes à déterminer). La vitesse du lièvre au départ et à l'arrivée est de $5\,{}^{\text{km}}/_{\text{h}}$ et de $10\,{}^{\text{km}}/_{\text{h}}$ respectivement. Contre toute attente, les deux participants arrivent au même moment à la ligne d'arrivée.

Combien de kilomètres la tortue a-t-elle parcourus ?

4. La composition de l'année. Considérons la fonction polynomiale $f(x) = 2x^2 - 1$. Évaluer et simplifier autant que possible l'expression

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2023}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{2023}}\right)\right).$$

Rappel : $f \circ g(x)$ signifie $f(g(x))$, $f \circ g \circ h(x)$ signifie $f(g(h(x)))$, etc...

© Association mathématique du Québec

5. Monsieur Impatient.

Chaque matin, monsieur Impatient se rend à l'arrêt d'autobus à un moment aléatoire entre 6 : 00 am et 7 : 00 am. Il attend 12 minutes et si l'autobus n'est toujours pas arrivé il se rend au travail en marchant. De son côté, l'autobus arrive aussi à un moment aléatoire entre 6 : 00 am et 7 : 00 am. Lors d'un matin donné, quelle est la probabilité que monsieur Impatient se rende au travail en autobus ?
Note : Les moments d'arrivée de Monsieur Impatient et de l'autobus sont uniformément distribués sur l'intervalle 6 : 00 *am à* 7 : 00 *am*

6. Rien en commun. Donner le nombre d'entiers positifs inférieurs à $2023 = 7 \cdot 17^2$ qui n'ont pas de facteur premier commun avec 2023.