

Concours de l'Association mathématique du Québec Niveau collégial

Le mercredi 9 février 2022

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

1. Les six doigts de la main

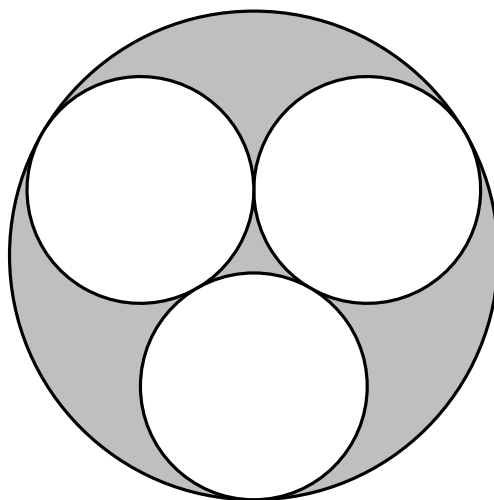
Montrer que tout nombre premier supérieur à 3 est égal à un multiple de 6 plus 1 ou moins 1.

2. Les chocolats

Une petite boîte de chocolats contient 4 morceaux de chocolat placés côte à côte sur une seule ligne. Il y a plusieurs sélections de saveurs pour les chocolats. Chaque boîte est confectionnée en choisissant au hasard la saveur de chaque chocolat. Calculer le nombre minimal de saveurs qui assurera que l'on ait au moins 51,2% de chance de ne pas avoir deux chocolats de même saveur qui se touchent.

3. Les trois cercles de Benoît

On inscrit trois cercles de rayon 1 dans le plus petit cercle possible de manière à ce que les trois cercles ne se superposent pas. Calculer l'aire de la région grisée.



4. Palindrome

Un nombre entier positif est appelé palindrome s'il reste le même lorsqu'on le lit de droite à gauche. Par exemple, 45754 et 921129 sont des palindromes. Démontrer que tout palindrome ayant un nombre pair de chiffres est divisible par 11.

5. La super fonction

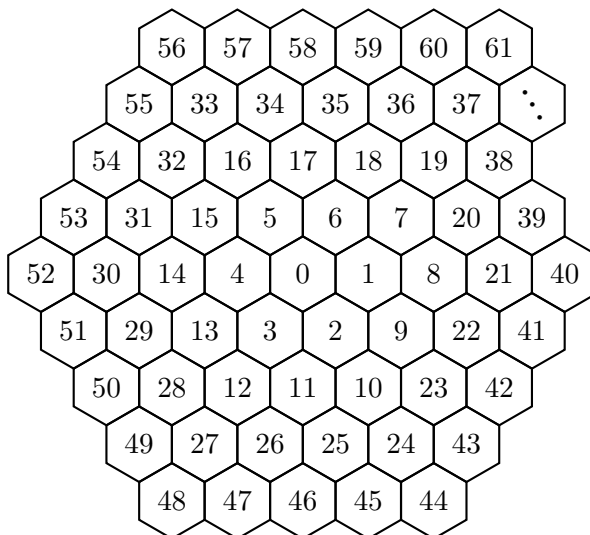
Soit f une fonction satisfaisant les égalités

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2, \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

- (a) Montrer que $f(0) = 0$.
- (b) Calculer $f'(0)$.
- (c) Trouver l'expression de $f'(x)$.
- (d) Trouver l'expression de $f(x)$.

6. La spirale de l'année

On écrit les nombres entiers à partir de 0 dans une spirale hexagonale, en commençant avec 0 au milieu et en tournant dans le sens horaire, comme montré ci-dessous.



Calculer la somme des six nombres qui entourent l'hexagone portant le numéro 2022.
