Solutions, concours collégial de l'AMQ 2021

1. Fractions de rêves La simplification

$$\frac{1\not{6}}{\not{6}4} = \frac{1}{4}$$

est évidemment fausse, mais dans ce cas-ci elle fonctionne. Trouver toutes les autres fractions avec des numérateurs et dénominateurs entre 10 et 99 inclusivement qui ont la même propriété, c'est à dire que la simplification de l'unité du numérateur avec la dizaine du dénominateur donne une fraction équivalente.

Solution On peut remarquer que les fractions $\frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \ldots, \frac{99}{99}$ vérifient toutes cette règle de simplification. Il faut trouver les autres.

Si on dénote les trois chiffres en jeu par a, b et c, on peut réécrire l'égalité voulue sous la forme

$$\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}.$$

On peut pour la suite supposer que $a \neq c$, puisque ce cas correspond aux fractions déjà identifiées. On peut aussi remarquer que a, b et c ne peuvent êtres nuls.

On peut voir que l'équation est équivalente à $9ac = b(10a - c)$, de sorte que le côté droit de l'équation doit être un multiple de 9. Analysons les valeurs possibles pour b.

Si $b = 9$, l'équation devient

$$ac = 10a - c$$

ce qui donne

$$a = \frac{c}{10-c}.$$

La seule possibilité pour que a soit un entier est $c = 5$. On a alors $a = 1$, et la fraction $\frac{19}{95}$.

Si $b = 6$, l'équation devient

$$9ac = 6(10a - c)$$

ce qui donne

$$a = \frac{2c}{20-3c}.$$

Les seules possibilités pour que a soit un entier et $a \neq c$ sont $(a, c) = (1, 4)$ et $(a, c) = (2, 5)$, d'où les fractions $\frac{16}{64}$ et $\frac{26}{65}$.

Si $b = 3$, l'équation devient

$$9ac = 3(10a - c)$$

ce qui donne

$$a = \frac{c}{10-3c}.$$

La seule possibilité pour que a soit un entier est $a = c = 3$, un cas déjà traité.

Si $b \neq 9$ et que b n'est pas un multiple de 3, alors on obtient que $10a - c$ doit être un multiple de 9. Comme $10a - c = 9a + (a - c)$, ceci implique que $a = c$, un cas déjà traité.

2. Factorielle de l'année

Soit $x_0 = 2021! = 2021 \cdot 2020 \cdot 2019 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Considérons la suite

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \text{la somme des chiffres de } x_0 \\ x_2 & = & \text{la somme des chiffres de } x_1 \\ x_3 & = & \text{la somme des chiffres de } x_2 \\ & \vdots & \end{array}$$

1. Cette suite devient éventuellement constante. Déterminer la valeur de cette constante.
2. Donner la valeur de x_3.

Solution Comme le nombre 2021 ! est nécessairement un multiple de 9, on sait que la somme de ses chiffres, x_1, est aussi un multiple de 9. Ce résultat étant lui-même un multiple de 9, la somme de ses chiffres sera également un multiple de 9 et ainsi de suite. Lorsque l'on atteindra un seul chiffre, ce sera donc forcément le chiffre 9.

Pour déterminer la valeur de x_3, le truc est ici de réussir à montrer que $x_3 < 18$, puisque cela implique alors que $x_3 = 9$ d'après la première partie. Pour y arriver, trouvons d'abord une borne supérieure pour x_1.

On peut utiliser les logarithmes. On se rappelle que la formule $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$ donne le nombre de chiffres en base 10 du nombre n. On a donc

$$\begin{array}{rcl} \text{Nombre de chiffres de } x_0 & = & \lfloor \log_{10}(2021!) \rfloor + 1 \\ & = & \lfloor \sum_{i=1}^{2021} \log_{10}(i) \rfloor + 1, \text{ d'après les propriétés des logarithmes} \\ & < & \lfloor \sum_{i=1}^{2021} 4 \rfloor + 1, \text{ car } \log_{10}(2021) < 4. \end{array}$$

On a donc que x_0 a moins de $(2021 \cdot 4) + 1 = 8085$ chiffres. On peut maintenant trouver une borne pour x_1, donnée par

$$x_1 \leqslant 9 \cdot 8\,085 = 72\,765.$$

Pour trouver une borne pour x_2, il suffit de prendre le nombre inférieur ou égal à 72 765 et ayant la plus grande somme de ses chiffres. Il s'agit de 69 999 ce qui donne

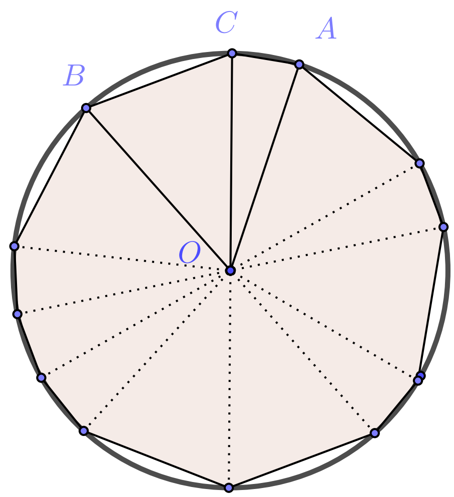
$$x_2 \leqslant 42.$$

Finalement, pour borner x_3, il suffit de prendre le nombre inférieur ou égal à 42 et ayant la plus grande somme de ses chiffres. Il s'agit cette fois de 39 ce qui nous donne

$$x_3 \leqslant 12.$$

3. Dodécagone mélangé Un dodécagone inscrit dans un cercle possède six côtés de longueur a et six de longueur b, dans un ordre quelconque. Soit C un sommet adjacent à un côté AC de longueur a et à un côté CB de longueur b. Évaluer l'angle ACB.

Solution On peut diviser un tel dodécagone en 12 triangles dont un sommet est le centre du cercle, comme sur la figure. Soit O le centre du cercle, et les points A, B et C tels qu'identifiés.



L'arc de cercle AB mesure 60 degrés (on parcourt de A vers B en sens anti-horaire) puisque le cercle est formé de six arcs congruents à l'arc AC et de six arcs congruents à l'arc CB. L'angle inscrit $\measuredangle ACB$ a pour mesure la moitié de l'arc BA : il mesure donc $(360° - 300°)/2 = 150°$.

On peut aussi travailler directement sur les deux triangles isocèles $\triangle OBC$ et $\triangle OAC$ qui forment le quadrilatère $OBCA$. L'angle en O est de 60 degrés, de sorte qu'il reste 300 degrés pour les deux paires d'angles congruents à la base des triangles isocèles.

4. Pile ou face Émilie et Christian jouent à "Pile ou Face". Pour rendre le jeu plus intéressant, ils décident de modifier la règle de la façon suivante : chacun doit choisir une combinaison de trois résultats (Pile, Face, Face, par exemple). Les deux combinaisons doivent être différentes. Ils lancent la pièce plusieurs fois et le premier qui voit sa combinaison apparaître dans trois lancers consécutifs remporte la partie. En supposant qu'Émilie choisit Face, Pile, Pile, quelle combinaison Christian doit-il choisir pour maximiser ses chances de gagner ? Quelle est alors sa probabilité de gagner ?

Solution Notons que le problème était en fait trop difficile, et la correction a conséquemment été très généreuse. La combinaison la plus favorable pour Christian est Face, Face, Pile. Voici une manière de déterminer la probabilité de gagner avec ce choix.

Soit $P_C(F)$ la probabilité que Christian gagne quand on vient de tirer un premier F, ou la suite P, F. Il est clair que c'est la même probabilité de gagner dans ces deux cas.

Christian a alors 1) une victoire assurée si on tire un F, 2) la même probabilité de gagner qu'avant (i.e $P_C(F)$)si on tire PF, et 3) il perd si on tire PP, de sorte que

$$P_C(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}P_C(F).$$

On en tire que $P_C(F) = \frac{2}{3}$.

Puis, si Pc est la probabilité que Christian gagne, on a (selon que ce soit P ou F qui est tiré) que

$$Pc = \frac{1}{2}Pc + \frac{1}{2}P_C(F).$$

Cela donne

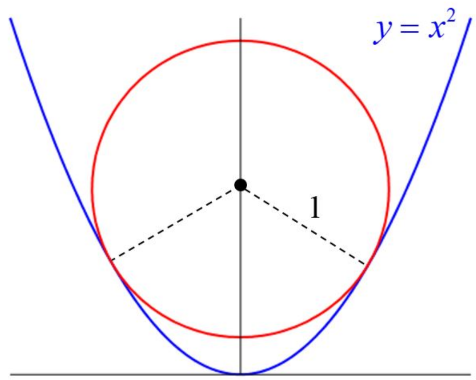
$$Pc = \frac{2}{3}.$$

Pour déterminer que cette combinaison est la plus favorable, on doit analyser les autres cas, pour lesquels la probabilité de gagner est en fait inférieure ou égale à $0,5$. Deux cas simples sont PPF et PPP, qui ne peuvent pas se produire avant FPP dès qu'un F est tiré. Par contre, faire tous les autres cas est laborieux.

Si le problème vous intéresse, nous vous invitons à faire une recherche sur Penney's game. Vous découvrirez que John Conway a établi un algorithme qui permet de déterminer simplement les probabilités respectives de gagner de deux adversaires.

5. Cercle parabolique

Déterminer les coordonnées du centre du cercle dans la figure.



Solution Soit $(0, a)$ les coordonnées du centre du cercle et (b, b^2) les coordonnées du point d'intersection entre le cercle et la parabole dans le premier quadrant. On peut déjà remarquer que puisque le rayon identifié est de mesure 1, on doit avoir (par Pythagore ou par la formule de distance entre deux points)

$$(a - b^2)^2 + b^2 = 1.$$

Comme le cercle et la parabole sont tangents, on sait que le rayon du cercle sera perpendiculaire à la tangente commune à ces deux coniques. La pente de la tangente à la parabole $y = x^2$ en un point (x, y) est donnée par la valeur de la dérivée en x, et est donc $2x$. Au point (b, b^2), elle vaut donc $2b$. Le rayon du cercle étant perpendiculaire à cette tangente, sa pente est $\frac{-1}{2b}$.

Le rayon fait ainsi partie de la droite $y = \frac{-x}{2b} + a$ (où a est bien l'ordonnée à l'origine de la droite). Pour que cette droite passe par (b, b^2), on doit avoir $b^2 = \frac{-b}{2b} + a$. On obtient donc

$$b^2 = a - \frac{1}{2}.$$

On remplace dans la première équation obtenue, ce qui donne $(a - a + \frac{1}{2})^2 + a - \frac{1}{2} = 1$ de sorte que $a = \frac{5}{4}$.

On peut aussi résoudre ce problème sans utiliser de calcul différentiel. En remplaçant le point (b, b^2) dans l'équation du cercle $x^2 + (y - a)^2 = 1$, on doit obtenir une seule solution en $y = b^2$ (car le cercle et la parabole sont tangents). En faisant cela, on a

$$\begin{aligned} b^2 + (b^2 - a)^2 &= 1 \\ (b^2)^2 + (1 - 2a)b^2 + a^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Cette dernière expression est une forme quadratique en b^2, et son discriminant doit donc être nul pour que l'on ait exactement une racine. On doit donc avoir

$$(1 - 2a)^2 - 4(a^2 - 1) = 0.$$

En développant le carré, on obtient $5 - 4a = 0$, d'où $a = \dfrac{5}{4}$.

6. L'année des copains

On a $2021 = 43 \cdot 47$. Les nombres premiers 43 et 47 sont appelés des nombres premiers copains parce qu'ils diffèrent de 4. Voici le début de la liste des paires de nombres premiers copains :

$$(3, 7),\ (7, 11),\ (13, 17),\ (19, 23),\ (37, 41),\ (43, 47), \ldots.$$

Montrer que le seul nombre premier qui appartient à deux paires de nombres premiers copains est 7.

Solution Si un nombre appartient à deux paires de nombres premiers copains alors nous avons une progression arithmétique de la forme $p, p+4, p+8$ où tous les nombres sont premiers. On peut voir que l'un des nombres est divisible par trois, et ne peut donc être premier que si il s'agit effectivement du nombre 3. Pour le montrer, on peut considérer que p est de la forme $3n$, $3n + 1$ ou $3n + 2$, et traiter ces trois cas.

Si $p = 3n$, alors $n = 1$ pour que p soit premier et ceci nous donne la progression $3, 7, 11$ qui fonctionne.

Si $p = 3n + 1$, alors la progression devient $3n + 1, 3n + 5, 3n + 9$ et cette situation est impossible car $3n + 9$ est un multiple de 3.

Si $p = 3n + 2$, alors la progression devient $3n + 2, 3n + 6, 3n + 10$ et cette situation est également impossible car $3n + 6$ est un multiple de 3, donc pas un nombre premier.