

Concours de l'Association mathématique du Québec Niveau collégial

Le 12 février 2020

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

1. Une suite répétitive

Soit la suite

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, \\x_2 &= 1, \quad x_3 = 2, \\x_4 &= 1, \quad x_5 = 2, \quad x_6 = 3, \\x_7 &= 1, \quad x_8 = 2, \quad x_9 = 3, \quad x_{10} = 4, \dots\end{aligned}$$

Le nombre 2 apparaît pour la deuxième fois au cinquième terme ($x_5 = 2$) et 5 apparaît pour la première fois au quinzième terme ($x_{15} = 5$). Soit n tel que $x_n = 9$ pour la sixième fois. Trouver N tel que $x_N = n$ pour la première fois.

2. Dérivée facile

Soit f une fonction réelle dérivable qui satisfait $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ pour tous x, y et $f(0) = f'(0) = 1$. Montrer que $f'(x) = f(x)$. Donner un exemple d'une telle fonction.

3. La somme des chiffres

Soit x un nombre entier quelconque constitué de chiffres croissants au sens large, et dont les deux derniers chiffres sont différents (exemple 1122555778). Montrer que la somme des chiffres de $9x$ est égale à 9.

4. Tangence

Soient deux petits cercles ayant des rayons de longueur 1 et un grand cercle ayant un rayon de longueur $-1 + \sqrt{10}$. Les trois cercles sont placés de sorte qu'ils soient tangents extérieurement deux à deux. Trouver le rayon du cercle passant par les centres des trois cercles.

5. Équations non linéaires

Soit x, y, z trois nombres réels tels que

$$\begin{aligned}xy + 2xz + 4yz &= 42 \\2xy + 5xz - yz &= 16 \\3xy - xz + 2yz &= 18.\end{aligned}$$

Déterminer toutes les valeurs possibles de xyz .

6. Le casse-tête

On tire deux pièces au hasard d'un casse-tête constitué de m lignes et n colonnes ($m, n \geq 2$). On suppose que chaque frontière entre deux pièces adjacentes a sa personnalité propre et que deux pièces ne peuvent s'ajuster l'une à l'autre que si elles vont réellement ensemble. Quelle est, en fonction de m et n , la probabilité que les deux pièces tirées puissent être assemblées l'une à l'autre ?
