Concours de l'Association mathématique du Québec
Niveau collégial

Le 12 février 2020

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note *: L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. Une suite répétitive

Soit la suite

$$\begin{aligned}&x_1 = 1,\\ &x_2 = 1, \quad x_3 = 2,\\ &x_4 = 1, \quad x_5 = 2, \quad x_6 = 3,\\ &x_7 = 1, \quad x_8 = 2, \quad x_9 = 3, \quad x_{10} = 4, \ldots\end{aligned}$$

Le nombre 2 apparait pour la deuxième fois au cinquième terme ($x_5 = 2$) et 5 apparaît pour la première fois au quinzième terme ($x_{15} = 5$). Soit n tel que $x_n = 9$ pour la sixième fois. Trouver N tel que $x_N = n$ pour la première fois.

Solution

$N = 5050$

Démonstration. Pour qu'un nombre k apparaissent pour la première fois, il faut que les séquences 1, $1, 2$, $\ldots$ $1, 2 \ldots k-1$ apparaissent puis une dernière fois $\ldots$ $1, 2 \ldots k-1$. Le nombre k sera alors le suivant. Il apparait donc pour la première fois au terme $m = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ ième terme.

La seconde apparition du nombre k se fera au terme $m + k$, la troisième au terme $m + k + k + 1$ et en général, l'apparition j se fera au terme $m + k(j-1) + \frac{(j-2)(j-1)}{2}$.

Pour trouver la sixième fois que la suite vaut 9, on cherche d'abord m_9, la première fois où 9 apparait. On obtient $m_9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$. Pour obtenir la sixième apparition de 9, on calcul

Finalement, on obtient $N = \frac{100\times101}{2} = 5050$.

2. Dérivée facile

Soit f une fonction réelle dérivable qui satisfait $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ pour tous x, y et $f(0) = f'(0) = 1$. Montrer que $f'(x) = f(x)$. Donner un exemple d'une telle fonction.

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$f'(0) = \lim_{h\to0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{f(h)-1}{h} = 1.$$

Calculons la dérivée de la fonction.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to0} \frac{f(x)\cdot f(h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to0} f(x)\cdot\left(\frac{f(h)-1}{h}\right) \\ &= f(x)\cdot \lim_{h\to0} \frac{f(h)-1}{h} \\ &= f(x)\cdot f'(0) = f(x) \end{aligned}$$

Un exemple d'une telle fonction est $f(x) = e^x$.

3. La somme des chiffres

Soit x un nombre entier quelconque constitué de chiffres croissants au sens large, et dont les deux derniers chiffres sont différents (exemple 1122555778). Montrer que la somme des chiffres de $9x$ est égale à 9.

Démonstration. Faisons la preuve avec un nombre à cinq chiffres (le cas général est identique) $x = a_4a_3a_2a_1a_0$ où $a_{i+1} \leqslant a_i$ et $a_1 < a_0$. On veut calculer la somme des chiffres de $9x$. Remarquons d'abord que $9x = 10x - x$:

$$\begin{array}{rrclllll} & 10x & = & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ - & x & = & & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & 9x & = & a_4 & a_3-a_4 & a_2-a_3 & a_1-a_2 & a_0-1-a_1 & 10-a_0 \end{array}$$

Étant donné que $a_{i+1} \leqslant a_i$, on est assuré que $0 \leqslant a_i - a_{i+1} \leqslant 9$ pour $i = 1, 2$ et 3 et le fait que $a_1 < a_0$ implique que $0 \leqslant a_0 - 1 - a_1 \leqslant 9$ d'où la somme des chiffres de $9x$ donne

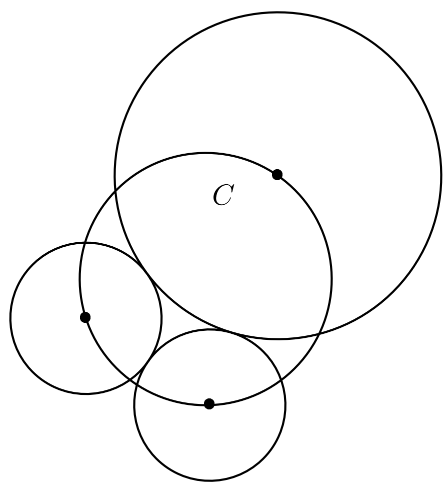
4. Tangence

Soient deux petits cercles ayant des rayons de longueur 1 et un grand cercle ayant un rayon de longueur $-1+\sqrt{10}$. Les trois cercles sont placés de sorte qu'ils soient tangents extérieurement deux à deux. Trouver le rayon du cercle passant par les centres des trois cercles.

Solution

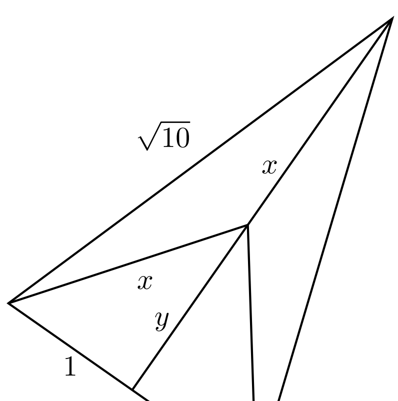
Le rayon est 5/3

Démonstration.



Voici le dessin initial du problème.

Soit le triangle qui relie les centres des trois cercles initiaux et x le rayon du cercle C.



Alors on obtient: $(x+y)^2+1^2=(\sqrt{10})^2 \Rightarrow x+y=3 \Rightarrow y=3-x$. En substituant dans $y^2+1^2=x^2$, on obtient que $x=\frac{5}{3}$.

5. Équations non linéaires

Soit x, y, z trois nombres réels tels que

$$\begin{array}{rcrcrcr} xy & + & 2xz & + & 4yz & = & 42 \\ 2xy & + & 5xz & - & yz & = & 16 \\ 3xy & - & xz & + & 2yz & = & 18. \end{array}$$

Déterminer toutes les valeurs possibles de xyz.

Solution

Les valeurs possibles sont

Démonstration. On pose $A=xy, B=xz$ et $C=yz$. Le système est linéaire en A, B, C:

$$A+2B+4C=42 \tag{1}$$

$$2A+5B-C=16 \tag{2}$$

$$3A-B+2C=18 \tag{3}$$

La résolution de ce système d'équations linéaires donne $A=2, B=4, C=8$. Puisque $64=ABC=(xyz)^2$, le produit xyz peut être égal à -8 ou à 8. On remarque en particulier qu'il n'est pas nécessaire de résoudre pour x, y et z.

6. Le casse-tête

On tire deux pièces au hasard d'un casse-tête constitué de m lignes et n colonnes ($m, n \geqslant 2$). On suppose que chaque frontière entre deux pièces adjacentes a sa personnalité propre et que deux pièces ne peuvent s'ajuster l'une à l'autre que si elles vont réellement ensemble. Quelle est, en fonction de m et n, la probabilité que les deux pièces tirées puissent être assemblées l'une à l'autre?

Démonstration.

On suppose que l'ordre dans lequel on pige les deux pièces importe. Le nombre de possibilités totales lorsqu'on pige deux pièces est donc de $mn(mn-1)$.

Calculons maintenant le nombre de cas favorables. La première pièce est soit dans un coin, soit sur un rebord (mais pas un coin) ou soit dans le milieu. On a

- 4 pièces de coin et 2 qui s'agencent avec chacune d'elles;
- $2m+2n-8$ pièces sur le rebord et 3 qui s'agencent avec chacune d'elles;
- $(m-2)(n-2)$ pièces dans le milieu et 4 qui s'agencent avec chacune d'elles.

Ceci nous donne donc une probabilité de

$$\frac{4\cdot 2+(2m+2n-8)\cdot 3+(m-2)(n-2)\cdot 4}{mn(mn-1)}=\frac{(2m-1)(2n-1)-1}{mn(mn-1)}.$$