

Concours de l'Association mathématique du Québec Niveau collégial

Le 20 février 2019

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

1. La peur du 13

Alexandre possède 100 cartes numérotées de 1 à 100. Il veut garder un ensemble de cartes tel qu'aucune paire de cartes n'ait une somme divisible par 13. Combien de cartes, au minimum, devra-t-il jeter?

2. Périmètre

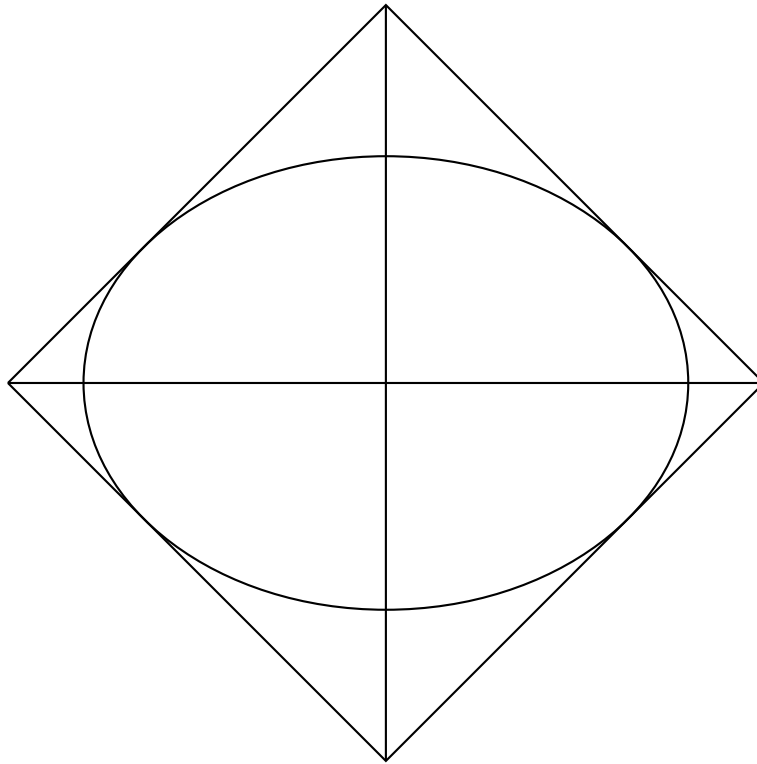
Soit un triangle rectangle de côtés x, y, z ayant une aire A . Sachant que

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4}{8} = 64 - A^2$$

et que $x + y + z = 4A$, trouvez le périmètre du triangle.

3. L'ellipse

Soit une ellipse de demi-grand axe 4 cm et de demi-petit axe 3 cm. Ces deux axes sont alignés sur les diagonales d'un carré. De plus, l'ellipse est tangente au carré en quatre points de contact. Trouver l'aire du carré.



4. Un champ de variables

Soit $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2019}$ des variables positives ou nulles. Donnez la valeur maximale de x_0 telle que

$$\sum_{n=0}^{2019} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots = 1 \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{2019} n x_n = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \dots = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{2019} n^2 x_n = x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + \dots = 2 \quad (3)$$

5. Le cube de cubes

Les six faces d'un cube sont recouvertes d'une couleur bleue. On brise ensuite le cube en n^3 petits cubes qu'on place dans un sac opaque. On pige ensuite un petit cube au hasard et on le lance à la manière d'un dé.

Quelle est la probabilité que la face sur le dessus soit bleue?

6. Hyperracine

Un nombre réel t est appelé l'hyperracine de c si $t > 0$ et $t^t = c$. Par exemple 2 est l'hyperracine de 4, car $2^2 = 4$ et 3 est l'hyperracine de 27 car $3^3 = 27$. Montrer que l'hyperracine de 2 est un nombre irrationnel.