Concours de l'Association mathématique du Québec
Niveau collégial

Le 20 février 2019

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

***Note** : L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. **La peur du 13**

   Alexandre possède 100 cartes numérotées de 1 à 100. Il veut garder un ensemble de cartes tel qu'aucune paire de cartes n'ait une somme divisible par 13. Combien de cartes, au minimum, devra-t-il jeter?

Solution

il doit jeter 51 cartes.

Démonstration.

Nous pouvons répartir les nombres 1 à 100 dans 13 sous-ensembles. Les nombres d'un sous-ensemble sont tous égaux modulo 13.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{1, 14, 27, 40, ..., 92\} \\
S_2 &= \{2, 15, 28, 41, ..., 93\} \\
S_3 &= \{3, 16, 29, 42, ..., 94\} \\
S_4 &= \{4, 17, 30, 43, ..., 95\} \\
&\dots \\
S_{12} &= \{12, 25, 38, 51, ..., 90\} \\
S_0 &= \{13, 26, 39, ..., 91\}
\end{aligned}
$$

Si l'ensemble final contient une carte de S_1, il ne pourra pas contenir une carte de S_{12}. Par contre, l'ensemble final peut contenir toutes les cartes de S_1 ou de S_{12}. Étant donné que S_1 contient plus de cartes, Alexandre pourra garder les huit cartes de S_1. Alexandre pourra garder, par un même raisonnement, les cartes des sous-ensembles S_2, S_3, S_4, S_5 et S_6. Finalement, Alexandre ne pourra garder qu'une carte de S_0. L'ensemble final contiendra donc $8+8+8+8+8+8+1 = 49$ cartes. Alexandre devra jeter au minimum 51 cartes.

2. **Périmètre**

Soit un triangle rectangle de côtés x, y, z ayant une aire A. Sachant que

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{8} = 64 - A^2$$

et que $x+y+z = 4A$, trouvez le périmètre du triangle.

Solution

Le périmètre est 9.

Démonstration.

Étant donné que

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{8} = 64 - A^2, \qquad A = \frac{xy}{2}$$

et

$$x^2+y^2 = z^2,$$

alors

$$\begin{aligned} x^4+y^4+z^4 = 512-2x^2y^2 \quad &\Rightarrow \quad (x^2+y^2)^2+z^4 = 512 \\ &\Rightarrow \quad 2z^4 = 512 \\ &\Rightarrow \quad z = 4. \end{aligned}$$

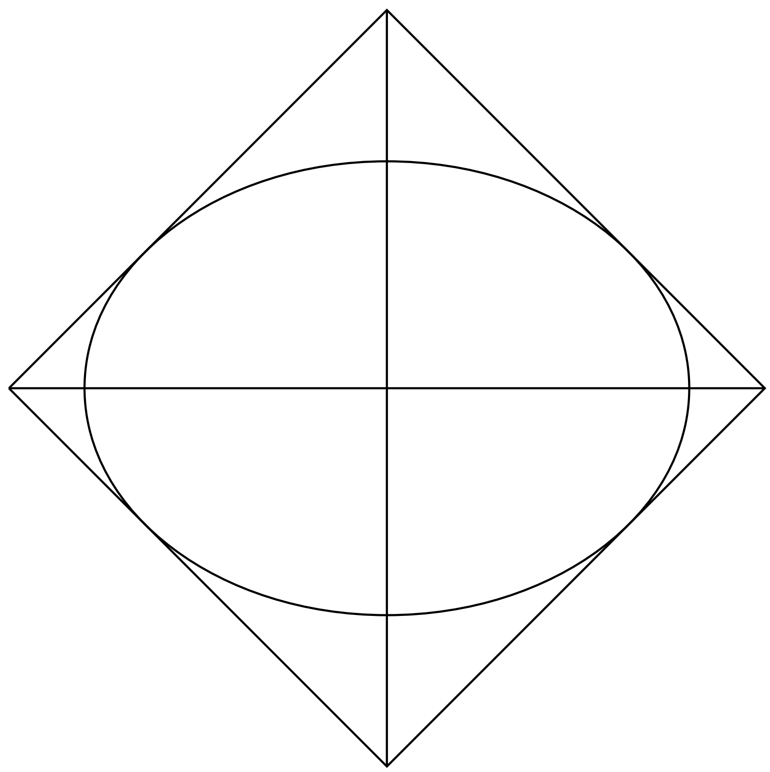
Étant donné que $x+y+z = 4A$, alors $x+y+4 = 2xy$. On en déduit que

$$\begin{aligned} x^2+y^2 = z^2 \quad &\Rightarrow \quad x^2+y^2+2xy = 16+x+y+4 \\ &\Rightarrow \quad (x+y)^2-(x+y)-20 = 0. \end{aligned}$$

On résout la quadratique et l'on trouve que $x+y = 5$ (on rejette la réponse -4). Alors le périmètre est $x+y+z = 9$.

3. L'ellipse

Soit une ellipse de demi-grand axe 4 cm et de demi-petit axe 3 cm. Ces deux axes sont alignés sur les diagonales d'un carré. De plus, l'ellipse est tangente au carré en quatre points de contact. Trouver l'aire du carré.



Solution

Le carré est d'aire $50\,\mathrm{cm}^2$**.**

Démonstration 1.

Par construction, deux des côtés du carré sont de la forme

$$y = x + k.$$

Ainsi, $y' = 1$. Nous allons trouver les valeurs de k.

La formule de notre ellipse est

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

En dérivant implicitement en x, nous trouvons

$$\frac{2x}{16}+\frac{2yy'}{9}=0.$$

Donc,

$$y=-\frac{9}{16}x.$$

En remplaçant cette équation dans celle de l'ellipse, nous trouvons,

$$x^2+\frac{9}{16}x^2=16.$$

Ainsi, $x=\pm 16/5$. Cela nous permet de déduire que $y=\mp 9/5$ et $k=\mp 5$.

Ainsi, les droites solutions sont $y=x+5$ et $y=x-5$. Elles forment deux côtés opposés du carré. La diagonale du carré est donc de 10 cm. Le côté du carré est de $5\sqrt{2}$ cm et sont aire de $50\,\mathrm{cm}^2$.

Démonstration 2 (Sans dérivée implicite).

Par construction, deux des côtés du carré sont de la forme

$$y=x+k.$$

Ainsi, $y'=1$. Nous allons trouver les valeurs de k.

La formule de notre ellipse est

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

On isole y,

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}.$$

On dérive en x et on ne conserve que la partie positive du résultat,

$$1=\frac{3}{4}\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}.$$

On en déduit que $x=\pm 16/5$. Cela nous permet de déduire que $y=\mp 9/5$ et $k=\mp 5$.

Ainsi, les droites solutions sont $y=x+5$ et $y=x-5$. Elles forment deux côtés opposés du carré. La diagonale du carré est donc de 10 cm. Le côté du carré est de $5\sqrt{2}$ cm et sont aire de $50\,\mathrm{cm}^2$.

Démonstration 3 (Sans calcul différentiel).

Par construction, deux des côtés du carré sont de la forme

$$y=x+k.$$

Nous pouvons résoudre les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9} &= 1, \\ y &= x+k, \end{aligned}$$

en cherchant une seule solution pour x lorsque k est fixé. En remplaçant y par $x+k$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{16}+\frac{(x+k)^2}{9} &= 1, \\ \frac{9x^2}{16}+x^2+2kx+k^2 &= 9, \\ \frac{25}{16}x^2+2kx+k^2-9 &= 0. \end{aligned}$$

Les solutions de cette équations sont

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4\frac{25}{16}(k^2-9)}}{2\frac{25}{16}}.$$

Nous avons une seule solution lorsque la partie sous la racine vaut zéro

$$\begin{aligned} 4k^2-4\frac{25}{16}(k^2-9) &= 0, \\ -\frac{9}{4}k^2 &= -9\frac{25}{4}, \\ k^2 &= 25. \end{aligned}$$

Ainsi, les droites solutions sont $y=x+5$ et $y=x-5$. Elles forment deux côtés opposés du carré. La diagonale du carré est donc de 10 cm. Le côté du carré est de $5\sqrt{2}$ cm et sont aire de $50\,\mathrm{cm}^2$.

4. Un champ de variables

Soit x_0, x_1, x_2,...x_{2019} des variables positives ou nulles. Donnez la valeur maximale de x_0 telle que

$$\sum_{n=0}^{2019} x_n = x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots=1 \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{2019} nx_n = x_1+2x_2+3x_3+4x_4+\ldots=1 \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{2019} n^2x_n = x_1+4x_2+9x_3+16x_4+\ldots=2 \tag{3}$$

Solution

$x_0 = 1/2$

Démonstration.

Démontrons que x_0 atteint sa valeur maximale si toutes les variables x_3 jusqu'à x_{2019} sont égales à 0. Isolons x_1 dans la deuxième équation,

$$x_1 = 1 - \sum_{n=2}^{2019} n x_n = 1 - 2x_2 - 3x_3 + \dots$$

Remplaçons x_1 dans la première et troisième équation.En simplifiant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_0 + \sum_{n=2}^{2019} (1-n)x_n &= x_0 - 1x_2 - 2x_3 - 3x_4 + \dots = 0, && (4) \\ \sum_{n=2}^{2019} (n^2 - n)x_n &= \qquad +2x_2 + 6x_3 + 12x_4 + \dots = 1. && (5) \end{aligned}$$

Multiplions par deux l'équation (4) et additionnons-y l'équation (5),

$$2x_0 + \sum_{n=3}^{2019} (2(1-n) + (n^2 - n))x_n = 1.$$

En isolant $2x_0$ et en simplifiant nous obtenons :

$$2x_0 = 1 - \sum_{n=3}^{2019} (n^2 - 3n + 2)x_n.$$

Puisque le polynôme $(n^2 - 3n + 2)$ est stricement positif à partir de $n = 3$, pour maximiser x_0, on doit avoir les valeurs les plus petites possibles pour les variables libres x_3 jusqu'à x_{2019}. Puisque les variables sont positives ou nulles, la valeur maximale de x_0 est atteinte lorsque les variables libres sont toutes égales à 0.

Résolvons le système d'équation

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 &= 1, \\ x_1 + 4x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Nous trouvons la solution $x_0 = 1/2$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1/2$. Le système original admet donc une solution minimale lorsque $x_0 = 1/2$.

5. Le cube de cubes

Les six faces d'un cube sont recouvertes d'une couleur bleue. On brise ensuite le cube en n^3 petits cubes qu'on place dans un sac opaque. On pige ensuite un petit cube au hasard et on le lance à la manière d'un dé.

Quelle est la probabilité que la face sur le dessus soit bleue?

Solution

$1/n$

Démonstration.

Solution 1

Parmi les n^3 cubes, il y en a 8 (chaque coin) qui possèdent trois faces colorées.

Si on enlève ces huit cubes et que l'on considère le bord de chaque face du grand cube, il y a $4(n-2)$ cubes par face du grand cube ayant deux faces colorées. Il y a 6 faces du grand cube à considérer, mais on comptera en double les petits cubes. On a ainsi $12(n-2)$ cubes ayant deux faces colorées.

Finalement, en enlevant la bordure de chaque face, il reste $(n-2)^2$ petits cubes par grande face ayant une seule face colorée pour un total de $6(n-2)^2$ petits cubes.

La probabilité cherchée est donc

$$\begin{aligned}
\frac{8}{n^3}\frac{3}{6} + \frac{12(n-2)}{n^3}\frac{2}{6} + \frac{6(n-2)^2}{n^3}\frac{1}{6} &= \frac{1}{n^3}\left(4+4(n-2)+(n-2)^2\right) \\
&= \frac{1}{n^3}\left(4+4n-8+n^2-4n+4\right) \\
&= \frac{1}{n^3}(n^2) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Solution 2

On réalise que toutes les faces ont la même probabilité de se retrouver sur le dessus. Il y a $6n^3$ faces et parmi celles-ci, $6n^2$ sont colorées. On obtient donc $\frac{6n^2}{6n^3} = \frac{1}{n}$.

6. Hyperracine

Un nombre réel t est appelé l'hyperracine de c si $t > 0$ et $t^t = c$. Par exemple 2 est l'hyperracine de 4, car $2^2 = 4$ et 3 est l'hyperracine de 27 car $3^3 = 27$. Montrer que l'hyperracine de 2 est un nombre irrationnel.

Solution

Posons $t = \dfrac{a}{b}$, où $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$, une hyperracine de 2. Comme $t^t = 2$, on a que $t = \dfrac{a}{b} > 1$, d'où $a > b$, et alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^{a/b} &= 2 \\ a^{a/b} &= 2 \cdot b^{a/b} \\ a^a &= 2^b b^a. \end{aligned}$$

De la dernière équation, il découle que 2 divise a. On peut donc écrire $a = 2c$, et ainsi

$$\begin{aligned} (2c)^a &= 2^b b^a \\ 2^a c^a &= 2^b b^a \\ 2^{a-b} c^a &= b^a \end{aligned}$$

Comme $a > b$, $a - b > 0$ et ainsi 2 divise b, ce qui contredit le fait que a et b n'ont aucun facteur en commun.

L'hyperracine de 2 est donc irrationnelle.