Association
mathématique
du Québec

Concours de l'Association mathématique du Québec

Ordre collégial

Le mercredi 21 février 2018

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note *: L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. Un compteur étourdi

Un compteur démarrant à 0 est utilisé pour afficher le nombre de personnes ayant franchi l'unique tourniquet à l'entrée d'un festival. Malheureusement, il est défectueux et saute toujours les chiffres 2, 5 et 7, passant directement au chiffre suivant, et ce peu importe la position du chiffre dans le nombre. Si, à la fin du festival, il indique 3608, combien de personnes ont réellement franchi le tourniquet pendant ce festival ?

SOLUTION :

Pendant son passage de 0000 à 3608, le premier chiffre sur le compteur est toujours 0, 1 ou 3. Lorsque le premier chiffre est 0 ou 1, les 3 autres chiffres peuvent prendre n'importe laquelle des 7 valeurs permises. On a donc $2 \cdot 7^3$ possibilités.

Lorsque le premier chiffre est 3, le deuxième chiffre peut prendre les valeurs :

- $0,1,3,4$: les deux derniers chiffres peuvent alors prendre n'importe laquelle des 7 valeurs permises, pour un total de $4 \cdot 7^2$ possibilités.
- 6 : les 6 possibilités sont : 3600, 3601, 3603, 3604, 3606 et 3608.

Il reste à soustraire 0000, qui ne correspond pas à une entrée. On a donc :

$$2 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 6 - 1 = 887 \text{ personnes.}$$

SOLUTION ALTERNATIVE : on peut aussi procéder en observant que le compteur s'incrémente comme les nombres en base 7, puisque seuls 7 symboles demeurent effectifs. Si on note $s_0, s_1, s_3, s_4, s_6, s_8, s_9$ les symboles (chiffres) que le compteur ne saute pas, et qu'on leur attribue les valeurs effectives

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 1, \quad s_3 = 2, \quad s_4 = 3, \quad s_6 = 4, \quad s_8 = 5, \quad s_9 = 6,$$

alors l'expression $s_3 s_6 s_0 s_8$ affichée par le compteur représente en fait la valeur numérique en base 7

$$(2405)_7 = 2 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0 = 887.$$

2. Limitons l'a

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{ax + x - 1 - a^2}{5a - 3x}$. Trouver toutes les valeurs de a telles que

$$f(a) = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

SOLUTION : On calcule d'une part la limite (ou l'ordonnée de l'asymptote horizontale)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax + x - 1 - a^2}{5a - 3x} = \lim_{x \to \infty} \frac{a + 1 - \frac{1 - a^2}{x}}{\frac{5a}{x} - 3} = -\frac{a+1}{3},$$

et d'autre part la valeur de la fonction

$$f(a) = \frac{a^2 + a - 1 - a^2}{5a - 3a} = \frac{a-1}{2a}.$$

Ainsi on souhaite résoudre pour a

$$\begin{aligned}\frac{a-1}{2a} = -\frac{a+1}{3} \quad &\Rightarrow \quad 3(a-1) = -2a(a+1)\\ &\Rightarrow \quad 3a-3 = -2a^2-2a\\ &\Rightarrow \quad 0 = 2a^2+5a-3 = 2a^2+6a-a-3 = 2a(a+3)-(a+3)\\ &\Rightarrow \quad 0 = (2a-1)(a+3)\end{aligned}$$

Les valeurs possibles sont donc $a = \frac{1}{2}$ et $a = -3$.

3. Récursion en chaîne

Soit la fonction suivante définie pour les naturels non-nuls.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-1) + f(n+1) & \text{si } n > 1 \text{ et } n \text{ est impair} \\ f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Calculer $f(2018)$.

SOLUTION : Remarquons d'abord que pour tous entiers positifs a, n, on a

$$f(a) = f(2a) = f(2^2 a) = \cdots = f(2^n a).$$

Cela dit, on a

$$\begin{aligned} f(2018) &= f(1009) = f(1008) + f(1010) \\ &= f(63 \cdot 2^4) + f(505) = f(63) + \big(f(504) + f(506)\big) \\ &= f(63) + f(63 \cdot 2^3) + f(253) = 2f(63) + \big(f(252) + f(254)\big) \\ &= 2f(63) + f(63 \cdot 2^2) + f(127) = 3f(63) + \big(f(126) + f(128)\big) \\ &= 3f(63) + f(63 \cdot 2) + f(2^7) = 4f(63) + f(1). \end{aligned}$$

Démontrons que $f(2^n - 1) = n$:

1) pour $n = 1$: $f(2^n - 1) = f(2^1 - 1) = f(1) = 1 = n$.

2) supposons que $f(2^n - 1) = n$; alors

$$\begin{aligned} f(2^{n+1} - 1) &= f(2^{n+1} - 2) + f(2^{n+1}) = f\big(2(2^n - 1)\big) + f(2 \cdot 2^n) \\ &= f(2^n - 1) + f(1) = n + 1. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient $f(63) = f(2^6 - 1) = 6$, et par conséquent $f(2018) = 4f(63) + f(1) = 4 \cdot 6 + 1 = 25$.

SOLUTION ALTERNATIVE : Avec la même démarche de départ que ci-haut, on pouvait tout aussi bien poursuivre les calculs

$$\begin{aligned}
f(63) &= f(62) + f(64) && = f(2 \cdot 31) + f(2^6) && = f(31) + f(1) \\
&= f(30) + f(32) + f(1) && = f(2 \cdot 15) + f(2^5) + f(1) && = f(15) + f(1) + f(1) \\
&= f(14) + f(16) + 2f(1) && = f(2 \cdot 7) + f(2^4) + 2f(1) && = f(7) + f(1) + 2f(1) \\
&= \ f(6) + \ f(8) + 3f(1) && = f(2 \cdot 3) + f(2^3) + 3f(1) && = f(3) + f(1) + 3f(1) \\
&= \ f(2) + \ f(4) + 4f(1) && = f(2 \cdot 1) + f(2^2) + 4f(1) && = f(1) + f(1) + 4f(1) \\
&= 6f(1).
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient $f(63) = 6f(1) = 6$, et par conséquent $f(2018) = 4f(63) + f(1) = 4 \cdot 6 + 1 = 25$.

4. Ruban sur la parabole

Soit une parabole de sommet $R\left(-\frac{1}{3}, -\frac{146}{9}\right)$ passant par les points $U(-3,-2)$, $B(3,y)$, A et N. Le segment $\overline{AN}$, de longueur 15, est parallèle au segment $\overline{UB}$. Sachant que l'ordonnée de A est inférieure à l'ordonnée de N, trouver les coordonnées du point A.

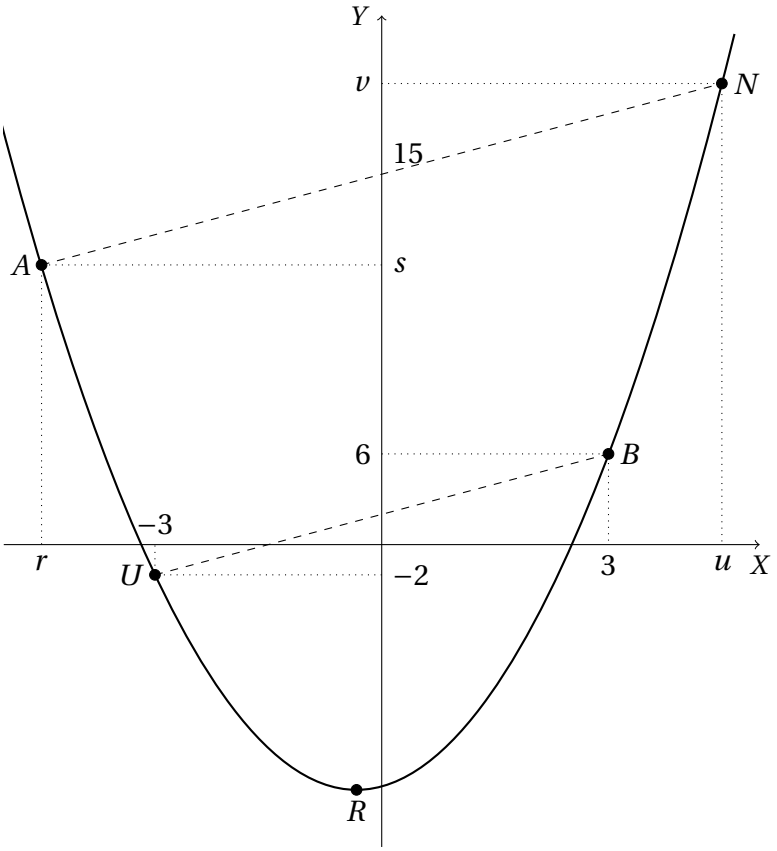
SOLUTION :

L'équation canonique de la parabole est $(Y-k) = a(X-h)^2$ avec ici $(h,k) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{146}{9}\right)$, donc $Y + \frac{146}{9} = a\left(X + \frac{1}{3}\right)^2$, qui par multiplication des membres par 9 devient $9Y + 146 = a(3X+1)^2$. Puisque $U(-3,-2)$ fait partie de cette parabole, on a

$$128 = 9 \cdot (-2) + 146 = a\big(3 \cdot (-3) + 1\big)^2 = 64a,$$

d'où l'on tire $a = 2 > 0$, et donc la parabole est concave vers le haut. On trouve l'ordonnée du point B :

$$y = \frac{1}{9}\big(2(3 \cdot 3 + 1)^2 - 146\big) = \frac{1}{9} \cdot 54 = 6.$$



Ainsi le segment $\overline{UB}$ allant de $(-3,-2)$ à $(3,6)$, de pente $\frac{6-(-2)}{3-(-3)} = \frac{4}{3}$, est parallèle à $\overline{AN}$. Par conséquent, si on note $A(r,s)$ et $N(u,v)$, on a alors $\frac{4}{3} = \frac{v-s}{u-r}$, ainsi que

$$225 = 15^2 = (u-r)^2 + (v-s)^2 = (u-r)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 (u-r)^2 = \frac{5^2}{3^2}(u-r)^2$$

et donc $(r-u)^2 = 9^2$, tandis que $(s-v)^2 = 15^2 - 9^2 = 6\cdot 24 = 12^2$. Puisque par hypothèse $s < v$, on peut conclure que $v-s = 12$, et donc $u-r = \frac{3}{4}(v-s) = 9$. Comme A, N sont sur la parabole, on a $9s + 146 = 2(3r+1)^2$ et $9v + 146 = 2(3u+1)^2$, et par soustraction :

$$9(v-s) = 2\big((3u+1)^2 - (3r+1)^2\big) = 2\big(3(u+r)+2\big)\cdot 3(u-r).$$

Donc $3(u+r)+2 = \frac{9}{2\cdot 3}\frac{v-s}{u-r} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 2$ d'où $u+r=0$. Cela permet d'écrire

$$r = \frac{(u+r)-(u-r)}{2} = \frac{0-9}{2} = -\frac{9}{2} = -4{,}5.$$

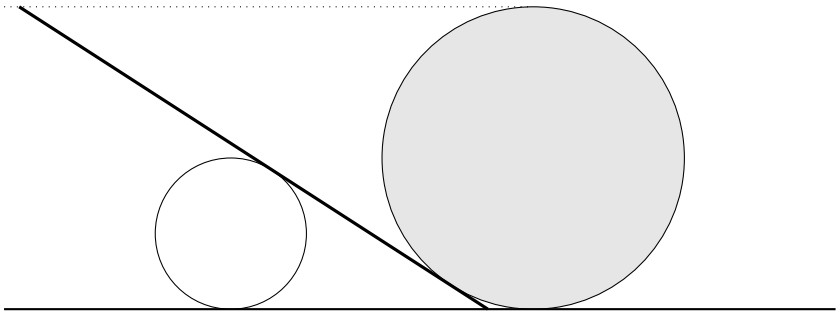
On trouve enfin

$$s = \frac{1}{9}\left(2(-3\cdot\frac{9}{2}+1)^2 - 146\right) = \frac{1}{9}\cdot\left(2\frac{25^2}{2^2} - \frac{146\cdot 2}{2}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{333}{2} = \frac{37}{2} = 18{,}5.$$

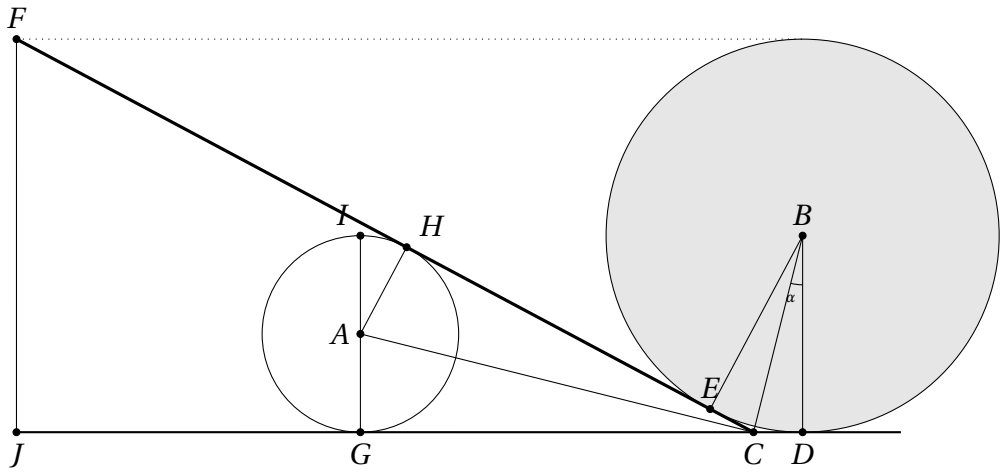
Ainsi on a les coordonnées $A\left(-\frac{9}{2}, \frac{37}{2}\right)$.

5. Donnez-moi un point d'appui...

Pour déplacer une roche massive de forme sphérique de 4 décimètres de rayon, on utilise un billot de bois cylindrique de 4 décimètres de diamètre et une perche pour produire un effet de levier. En insérant la perche jusqu'à ce qu'elle touche au sol on réalise que son autre extrémité arrive à la même hauteur que la roche (vue en coupe sur le schéma ci-dessous). Si les points de tangence de la roche et du billot avec le sol sont espacés de 9 décimètres, quelle est la longueur de la perche ? On considère négligeable l'épaisseur de la perche.



Solution 1 :

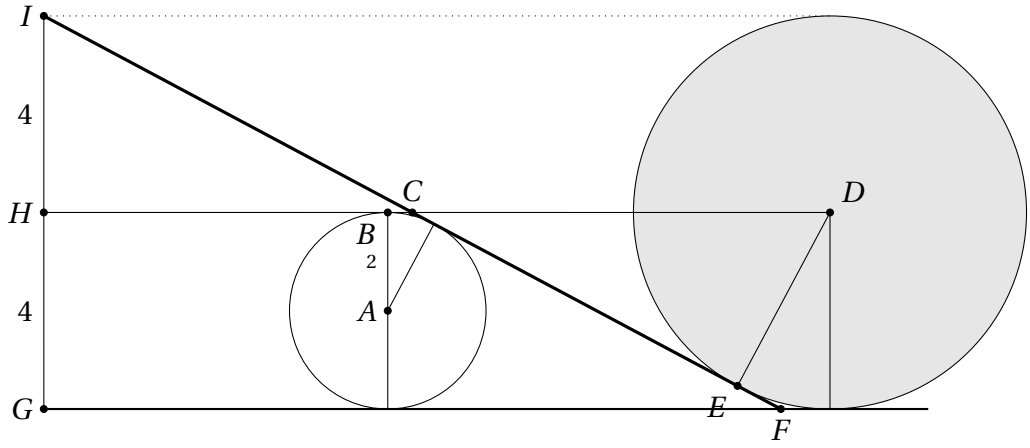


Soit α l'angle DBC. Alors l'angle $EBC = \alpha$. L'angle ECD est $\pi - 2\alpha$. L'angle $HCG = 2\alpha$ et l'angle $HCA = \alpha$. Le triangle CDB est donc semblable au triangle AGC.

Soit h la longueur de CD, alors par la proportion des triangles semblables, on a : $\frac{9-h}{2} = \frac{4}{h}$, donc $h = 8$ ou 1. On élimine le cas $h = 8$ car le segment HD croiserait le petit cercle. Donc CG mesure 8. On recherche la longueur de FC qui est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'angle est 2α et le côté opposé est 8. Donc la mesure de FC est $\frac{8}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin\alpha\cos\alpha}$. Par le triangle CGA, on trouve que $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ et $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$. On conclut que la mesure de FC est

$$\frac{4}{\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}}} = 17.$$

Solution 2 :



Soit $x = mBC$, alors $mCD = 9–x$. Le triangle ABC étant semblable au triangle DEF (double), alors $mEF = 2x$. Le triangle HIC est identique au triangle DEC, donc $mIC = 9–x$. Le triangle GIF est semblable au triangle HIC (double) donc IF (qui est la longueur cherchée) $= 18–2x$ et $mCF = 9-x$. On a donc que $mCE = (9–x)–2x = 9-3x$. Comme le triangle rectangle CED a pour côtés $9–x$, $9–3x$ et 4, en appliquant Pythagore on trouve que $8x^2–36x + 16 = 0$ ce qui donne les valeurs possibles de $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$ (à rejeter). D'où $IF = 18–1 = 17$.

6. Vainquons l'inégalité !

Soit x, y et z trois nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}} > \pi.$$

Solution :

Considérons les points de l'espace ayant pour coordonnées $A(x, y, z)$ et $B\left(-\frac{1}{x}, -\frac{1}{y}, -\frac{1}{z}\right)$ ainsi que l'origine O. Selon l'inégalité triangulaire on a que

$$m\overline{OA} + m\overline{OB} \geq m\overline{BA}$$

ce qui implique

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{\left(-\frac{1}{x}\right)^2+\left(-\frac{1}{y}\right)^2+\left(-\frac{1}{z}\right)^2} \geq \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2+\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^2+\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2}.$$

Or si on pose $f(x)=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2=\frac{(x^2+1)^2}{x^2}$, on a $f'(x)=\frac{2(x^2+1)(x^2-1)}{x^3}$, et une étude des signes de la dérivée nous montre que pour un x positif la fonction atteint son minimum absolu à $x=1$. On a alors que ce minimum est $f(1)=4$ d'où

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}} &\geq \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2+\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^2+\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2}\\ &\geq \sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}>\sqrt{10,24}=\sqrt{3,2^2}\\ &>\pi.\end{aligned}$$

Solution alternative : Observons d'abord que pour tout réel $a>0$ on a

$$0\leq (a-1)^2=a^2-2a+1 \quad \Rightarrow \quad a^2+1\geq 2a$$

et cette dernière inégalité mène à $a+\frac{1}{a}\geq 2$ par division par a. Ensuite

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}}\right)^2\\ &\quad=\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}\right)+2\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}\right)}\\ &\quad=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+2\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}+1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}+1+\frac{z^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}}\\ &\quad=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+2\sqrt{3+\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}\right)}.\end{aligned}$$

Chaque parenthèse a la forme $a+\frac{1}{a}$ et se majore donc par 2, donc

$$\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}}\right)^2 \geq 2+2+2+2\sqrt{3+2+2+2}=6+2\sqrt{9}=12,$$

donc $\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}} \geq \sqrt{12} > \pi$.

Remarque : on peut aussi observer que puisque le membre de gauche est une expression symétrique, toute valeur extrême sera sur la droite d'équation symétrique $x = y = z$: cela mène à étudier $\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ qui atteint son minimum $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ en $x = 1$.